

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 maggio 1925

R. PIROTTA, Socio anziano, *presidente*

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geometria. *Sulle varietà a sezioni piane collineari.* Nota del
Corrisp. GUIDO FUBINI ⁽¹⁾.

Vogliamo qui determinare le superficie $\bar{\alpha} = \varphi(x, y)$ a sezioni piane tra loro collineari ⁽²⁾. Le sue sezioni coi piani

$$(1) \quad \bar{\alpha} = k, \quad \bar{\alpha} = k + ax + by + c \quad (k, a, b, c = \text{cost.})$$

sono definite dalle equazioni:

$$(2) \quad k = \varphi(x, y) \quad ; \quad k + a\bar{x} + b\bar{y} + c = \varphi(\bar{x}, \bar{y}).$$

Per ipotesi dall'una si passa all'altra con una collineazione

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{x + P}{1 + S}, \quad \bar{y} = \frac{y + Q}{1 + S},$$

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(2) L'importanza di questo problema e del problema analogo per le varietà iperspaziali è stata posta in chiara luce da un'osservazione del prof. Terracini, che osservò come molti teoremi geometrici caratterizzano varietà mediante caratteri proiettivi delle loro sezioni iperpiane (p. es. di essere superficie di Veronese) e sono da riguardarsi come casi particolari dei problemi qui enunciati.

dove P, Q, S sono polinomi lineari in x, y (ed anzi S omogeneo) con coefficienti funzioni di k, a, b, c nulli per $a = b = c = 0$. Sarà perciò

$$(4) \quad \begin{aligned} P &= P_0 c + P_1 a + P_2 b + \dots; & Q &= Q_0 c + Q_1 a + Q_2 b + \dots; \\ S &= S_0 c + S_1 a + S_2 b + \dots, \end{aligned}$$

ove i termini trascurati sono almeno di secondo grado in a, b, c e i polinomi P_i, Q_i, S_i lineari in x, y (e gli S_i anche omogenei) hanno coefficienti funzioni della sola k . Ricordando (4) e scrivendo che (3) trasforma le (2) l'una nell'altra, si trova, posto $p = \varphi_x, q = \varphi_y$:

$$\begin{aligned} ax + by + c + \dots &= \varphi \left(\frac{x + P}{1 + S}, \frac{y + Q}{1 + S} \right) - \varphi(x, y) = \\ &= p(x + P - xS) + q(y + Q - yS) + \dots \end{aligned}$$

ossia, sviluppando, confrontando i termini in a, b, c

$$(5) \quad \begin{cases} 1 = p(P_0 - xS_0) + q(Q_0 - yS_0) \\ x = p(P_1 - xS_1) + q(Q_1 - yS_1) \\ y = p(P_2 - xS_2) + q(Q_2 - yS_2) \end{cases}$$

Posto

$$X = p, Y = q, \quad T = px + qy, \quad Z = 1,$$

sarà:

$$(5-bis) \quad T = Xx + Yy \quad \text{e} \quad T S_i = p P_i + q Q_i - \alpha_i Z \quad (i = 0, 1, 2)$$

ove $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = x, \alpha_2 = y$.

Eliminando T, X, Y, Z , si otterrà

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & 0 \\ S_0 & P_0 & Q_0 & 1 \\ S_1 & P_1 & Q_1 & x \\ S_2 & P_2 & Q_2 & y \end{vmatrix} = 0.$$

Caso I): Sia $S_0 = 0$; in tal caso la collineazione che porta la sezione col piano $\chi = k$ nella sezione col piano $\chi = k + c$ per c infinitesimo trasforma in sè l'intersezione dei due piani secanti. Se ciò si può evitare, cambiando coordinate, noi potremo supporre $S_0 \neq 0$. Se così non è, la precedente proprietà varrà per le sezioni con due piani infinitamente vicini scelti

in modo arbitrario (p. es. $\alpha = k, \alpha = ax + by + c$ per a, b, c infinitesimi). Perciò:

$$a(P_1 a + P_2 b + P_0 c) + b(Q_1 a + Q_2 b + Q_0 c) \\ - (ax + by)(\varphi_1 a + S_2 b + S_0 c)$$

e quindi anche

$$(7) \quad a(P_1 a + P_2 b + P_0 c) + b(Q_1 a + Q_2 b + Q_0 c) \\ + c(S_1 a + S_2 b + S_0 c) \quad (S_0 = 0)$$

sarà nulla per $ax + by + c = 0$; la (7) sarà perciò il prodotto di $ax + by + c$ per un'espressione $ra + sb + tc$ con r, s, t funzioni di k .

Confrontando in questo prodotto e nella (7) i termini in c^2, a^2, b^2 si trova:

$$P_1 = rx \quad ; \quad Q_2 = sy \quad ; \quad t = 0.$$

Confrontando i termini in ab, bc, ca , si trova poi:

$$P_2 + Q_1 = ry + sx, \quad P_0 + S_1 = r, \quad Q_0 + S_2 = s.$$

Le (5) diventano:

$$1 = p(r - S_1) + q(s - S_2) \quad ; \quad x = p(rx - xS_1) + q(Q_1 - yS_1) \quad ; \\ y = p(P_2 - xS_2) + q(sy - yS_2).$$

Sottraendo dalle ultime due la prima moltiplicata per x o per y :

$$q(Q_1 - yS_1 - sx + S_2x) = p(P_2 - xS_2 - ry + S_1y) = 0.$$

E, poichè in un punto generico $pq \neq 0$, ed S_1, S_2 sono omogenee di 1° grado:

$$Q_1 - sx = P_2 - ry = yS_1 - xS_2 = 0$$

cioè

$$Q_1 = sx \quad P_2 = ry \quad S_1 = lx \quad S_2 = ly \quad (l \text{ funzione di } k).$$

E le (5) si riducono alla:

$$(8) \quad 1 = rp + sq - l(xp + yq).$$

I piani tangenti nei punti di una sezione piana $\alpha = k$ (che è una sezione generica) passano tutti per un medesimo punto $x:y:z:1 = r:s:1 + kl:l$.

Se questo punto P non varia col piano secante π , la superficie è un cono; se invece P varia, è facile provare che la corrispondenza P, π è una reciprocità e che la superficie è una quadrica.

Caso II): Esclusi questi casi potremo supporre $S_0 \neq 0$; in tal caso le ultime due delle (5) non possono essere conseguenze *identiche* della prima (cioè non possono dedursi da questa, moltiplicandola per x o per y), perchè, se così fosse, sarebbe evidentemente $S_0 = 0$. Se poi le ultime due delle (5) fossero conseguenza della prima, quando si tenesse conto dell'equazione della superficie, allora sottraendo p. es. dalla seconda la prima moltiplicata per x , si otterrebbe che in virtù dell'equazione della superficie sarebbe:

$$0 = P_1 - x(S_1 + P_0) + x^2 S_0 = Q_1 - (y S_1 + x Q_0) + y x S_0 = 0.$$

La sezione della superficie con un piano $z = k$ soddisferebbe ad entrambe queste equazioni, e perciò sarebbe o una retta $x + l = 0$, o una retta $S_0 + l = 0$, o una conica $x S_0 + m x + n y + l = 0$ (l, m, n funzioni di k).

L'ultimo caso è da escludere, come si vede p. es. studiando in modo analogo l'equazione ottenuta sottraendo dall'ultima delle (5) la prima moltiplicata per y . Dunque le sezioni piane della nostra superficie sarebbero rette, e la superficie si ridurrebbe a un piano.

Caso III): Studiamo gli altri casi. Se (6) non è un'equazione identica, essa prova che le sezioni della superficie con un piano generico $z = k$ sono curve di quarto grado, e che pertanto *la superficie è algebrica e al massimo di quarto grado*. Supponiamo invece la (6) soddisfatta in virtù dell'equazione della superficie. Uguagliando il valore di $-p:q$ tratto dalla prima e dalla terza si ha:

$$(9) \quad \frac{Q_1 - y S_1 - x Q_0 + x y S_0}{P_1 - x(S_1 + P_0) + x^2 S_0} = \frac{Q_2 - y(S_2 + Q_0) + y^2 S_0}{P_2 - x S_2 - y P_0 + x y S_0}.$$

Queste due frazioni non sarebbero pertanto ridotte ai minimi termini. Se i due termini del primo membro avessero a comune un fattore $x S_0 + \dots$, allora $-p:q$ si ridurrebbe a una frazione del tipo $(y + m):(x + n)$; cioè lungo una sezione $z = k$ sarebbe $dy:dx = (y + m):(x + n)$; donde, integrando, si vedrebbe che tale sezione sarebbe una retta, e la superficie un piano. La (9) può valere in altri casi soltanto se i termini del primo membro hanno comune un fattore $x + f$ (con f funzione di k).

Indicando con P', Q', T', U' dei polinomii lineari *omogenei* in x, y e con p, q, t, u, g funzioni delle sole k e ponendo $P_i = P'_i + p_i$, $Q_i = Q'_i + q_i$, sarà dunque:

$$\begin{aligned} Q_1 - y S_1 - x Q_0 + x y S_0 &= (x + f)(y S_0 + T' + t), \\ P_1 - x(S_1 + P_0) + x^2 S_0 &= (x + f)(x S_0 + U' + u). \end{aligned}$$

Identificando, si trae in particolare:

$$\begin{aligned} -(x Q'_0 + y S_1) &= f y S_0 + x T' \quad \text{ossia: } y(f S_0 + S_1) = -x(Q'_0 + T') \\ -x(S_1 + P'_0) &= f x S_0 + x U' \quad \text{ossia: } x(f S_0 + S_1) = -x(P'_0 + U'). \end{aligned}$$

E perciò:

$$S_1 + f S_0 = g x \quad , \quad Q'_0 + T' = -g y \quad , \quad P'_0 + U' = -g x$$

$$-p : q = y S_0 + T' + t : x S_0 + U' + u ,$$

cioè:

$$p(x S_0 + U' + u) + q(y S_0 + T' + t) = 0 .$$

Sommando con la prima delle (5), che ora si scrive:

$$1 = p(P'_0 + p_0 - x S_0) + q(Q'_0 + q_0 - y S_0)$$

si deduce

$$1 = p(-g x + v) + q(-g x + w) \quad (v = p_0 + u, w = q_0 + t)$$

che è dello stesso tipo della (8). Ritorniamo così a un caso già trattato e concludiamo che *nello spazio a tre dimensioni le superficie a sezioni collineari sono o coni o superficie algebriche di grado massimo 4.*

Queste ultime superficie, insieme a una trattazione sintetica del problema completo, si troveranno nella seguente nota del prof. Gino Fano.

Geometria. — *Sulle superficie dello spazio S_3 a sezioni piane collineari.* Nota del Corrisp. GINO FANO ⁽¹⁾.

1. — Il Prof. Fubini mi ha comunicata la sua Nota precedente ⁽²⁾. La determinazione delle superficie di cui trattasi può farsi anche per via sintetica.

Consideriamo due sezioni piane della superficie proposta F , infinitamente vicine, e supponiamo anzitutto che la collineazione fra esse, per ogni coppia di sezioni infinitamente vicine, sia una prospettiva. Allora i piani tangenti a F nei punti di una sua sezione piana passeranno tutti per un medesimo punto, centro comune della prospettiva fra questa sezione e una qualsiasi delle sue infinitamente vicine.

Se, al variare di quella sezione piana, *non* varia questo centro di prospettiva, la F sarà un cono.

Se invece questo centro varia, nascerà una corrispondenza (biunivoca, almeno entro regioni opportune) fra il sistema dei piani π di quelle sezioni (spazio Σ) e il sistema dei centri di prospettiva P' (spazio Σ'), che

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(2) *Sulla varietà a sezioni piane collineari*, questi « Rendiconti », qui innanzi, p. 469.

possiamo chiamare *poli* di quei piani. I piani tangenti a F nelle sue intersezioni con una retta r conterranno i poli di tutti i piani passanti per r stessa; quindi a piani π passanti per una retta r di Σ (incontrante la F) corrisponderanno in Σ' poli P' appartenenti a una retta r' ; e, per conseguenza, a piani π di una stella, punti di un piano. La corrispondenza fra il sistema dei piani π e il sistema dei poli P' , definita almeno per determinate regioni degli spazi sovrapposti Σ e Σ' , è dunque proiettiva. E poichè piani π passanti per un punto A di F hanno i rispettivi poli nel piano α ivi tangente ad F , questa superficie sarà il luogo dei punti dello spazio Σ che appartengono ai piani loro omologhi in Σ' ; sarà dunque una quadrica (e la corrispondenza considerata sarà la polarità rispetto a questa quadrica).

2. - Supponiamo ora che la collineazione fra 2 sezioni piane infinitamente vicine generiche *non* sia una prospettiva.

Consideriamo le intersezioni P_1, P_2, \dots di F con una retta r generica, e i piani π_1, π_2, \dots tangenti a F in questi punti; nonchè le curve intersezioni di F con due piani infinitamente vicini μ, μ' passanti per r . La collineazione fra queste curve, estesa agli interi piani μ, μ' , genererà una sviluppabile di 3^a classe (generalmente irriducibile, ma che non escludiamo possa spezzarsi), involuppo dei piani che segano μ, μ' secondo coppie di rette omologhe, e tangente in particolare al piano μ lungo la r ; e fra i piani tangenti di questa sviluppabile sono compresi i piani π_1, π_2, \dots tangenti a F . Invero: sia v un altro piano qualsiasi passante per r , e nella collineazione fra le sezioni piane, quindi fra i piani stessi μ, v si considerino di uno qualunque dei punti P_i , come elemento di μ o rispett. di v , gli omologhi P_i'', P_i' rispett. in v e μ ; saranno allora omologhe le rette $P_i'P_i$ e P_iP_i'' , e il loro piano apparterrà alla sviluppabile di 3^a classe generata da questa collineazione. Quando il piano v , descrivendo il fascio r , tende alla posizione μ , nel triangolo $P_i'P_iP_i''$ tenderanno a zero i due lati $P_i'P_i$ e P_iP_i'' e l'angolo compreso $\widehat{P_i}$, che saranno in generale infinitesimi dello stesso ordine; e il rapporto di quei due lati, segmenti corrispondenti in una collineazione che tende all'identità, tenderà ad uno. Di qui si trae facilmente che i rimanenti due angoli si conserveranno in generale di grandezza finita; per conseguenza, mentre il lato P_iP_i' tende alla tangente in P_i alla curva intersezione di F col piano μ , il lato $P_i'P_i''$ tenderà a un'altra fra le tangenti in P_i alla superficie F , e il piano $P_i'P_iP_i''$ tenderà al piano π_i ⁽¹⁾.

(1) È questione analoga a quella (e forse caso particolare di quella) considerata dal compianto nostro Socio C. SEGRE nell'ultima sua Nota: *Sugli elementi curvilinei, che hanno comuni la tangente e il piano osculatore* (questi «Rendiconti», ser. 5^a, vol. 33^o, 1924 (1^o sem.), p. 325). Perchè la retta ivi indicata con PQ non tenda alla tangente comune in A ai due rami ivi considerati e descritti rispett. da P e Q , occorre appunto che tra P e Q passi una certa relazione, definita a meno di infinitesimi di ordine superiore (come è qui l'eguaglianza dei segmenti $P_i'P_i, P_iP_i''$).

Si conclude pertanto che le ∞^1 sviluppabili di 3^a classe generate dalle collineazioni fra le coppie di piani infinitamente vicini di un medesimo fascio r hanno a comune i vari piani π_1, π_2, \dots tangenti ad F nelle sue intersezioni colla r ; tali piani non possono dunque essere in numero superiore a quattro (poichè ciascuna di quelle sviluppabili è individuata da 6 piani, e due di esse infinitamente vicine hanno già a comune in più un piano del fascio r).

Inoltre, data la r , i piani tangenti ad F nelle sue intersezioni con questa retta si ottengono con una costruzione algebrica; la F è quindi algebrica, e di ordine ≤ 4 .

3. - Rimane quindi soltanto a esaminare quali superficie algebriche di 3° e di 4° ordine abbiano due sezioni piane generiche fra loro collineari.

Fra quelle di 3° ordine, vanno escluse le superficie a sezioni ellittiche (salvo i coni). Invero, tali sezioni dovrebbero avere modulo costante; e allora, per le sezioni con piani tangenti, il modulo dovrebbe risultare indeterminato; esse avrebbero cioè una cuspidale, e la F , avendo i suoi punti tutti parabolici, sarebbe una sviluppabile; quindi, trattandosi di superficie di 3° ordine, un cono. Viceversa, le F^3 a sezioni razionali, che sono tutte rigate e (se non sono coni) con due direttrici rettilinee, distinte o infinitamente vicine, hanno come sezioni generiche curve con punto doppio ordinario, che sono appunto tutte collineari (però, nel caso delle due direttrici distinte, la collineazione fra due sezioni generiche reali non è sempre reale).

4. - L'esame particolareggiato delle diverse F^4 che non sono coni mostra che per la sola sviluppabile delle tangenti a una cubica sghemba due sezioni piane generiche sono collineari.

Si escludono anzitutto le F^4 a sezioni di genere maggiore di zero, con un'osservazione analoga a quella fatta per le F^3 a sezioni ellittiche (e concernente ancora, sostanzialmente, i moduli di queste curve). Consideriamo, sopra una sezione piana generica, una serie lineare ben definita, segata da un fascio di rette; p. es., se la sezione è di genere 1 o 2, la g_2^1 segata dalle rette che passano per un determinato punto doppio; se è di genere 3, la g_3^1 segata dalle rette passanti per il punto tangenziale di un determinato flesso. Facendo variare con continuità questa sezione, p. es. in modo che continui a passare per il punto doppio o per la tangente tripunta considerata, dovranno, in quella serie lineare, mantenersi costanti i birapporti di tutte le quaderne formate con quelle rette del fascio (tangenti alla C^4 , rette che passano per altri punti doppi o per flessi, ...) che colla C^4 hanno una qualsiasi relazione proiettiva. Quando il piano diviene tangente a F^4 , alcune di queste rette vengono a coincidere; e, per non turbare la conservazione di quei birapporti, occorrerà che tutti i birapporti in cui

entravano due fra le rette ora coincidenti divengano indeterminati; cioè che in nessuna quaderna vengano a coincidere due elementi, senza che con essi ne coincida anche un terzo. Ciò richiede che vengano a coincidere tutte quante quelle rette, meno una al più; e nei casi indicati, se la superficie non è un cono, questo non può avvenire.

Questa considerazione (nella forma proiettiva in cui l'ho presentata) è applicabile anche alle F^4 a sezioni razionali; ma non basta ad escludere qualche caso di rette doppie consecutive (p. es. la F^4 di Steiner colle 3 rette doppie tutte infinitamente vicine). Preferisco perciò ragionare come segue, rispett. per i due casi (che, come è noto, sono i soli possibili) di una F^4 di Steiner e di una rigata.

Una F^4 di Steiner è proiezione di una Φ^4 di Veronese, dello spazio S_5 , da una retta r . Le eventuali omografie tra le sezioni piane della F^4 di Steiner si rispecchierebbero in omografie fra le sezioni della Φ^4 normale di cui esse sono rispett. proiezioni dalla r , e queste ultime omografie avrebbero sempre la retta r come unita; di più, ciascuna di queste ultime omografie sarà subordinata (come avviene per una proiettività fra 2 coniche di un piano) da una omografia sulla Φ^4 , completamente individuata. Si avrebbe perciò sulla Φ^4 un gruppo almeno ∞^3 di omografie, ancora colla retta r come unita; e per conseguenza anche la F^4 di Steiner dovrebbe ammettere ∞^3 trasformazioni proiettive in sé, mentre è noto che non le ammette.

Infine, una F^4 rigata (non cono) può considerarsi, nello spazio rigato, cioè nella quadrica Q_4^2 formata dalle rette dello spazio S_3 , come una curva C^4 , appartenente a uno spazio S_4 , e in tal caso normale, oppure a un S_3 . Alle curve sezioni piane di F^4 corrispondono sulla Q_4^2 delle ∞^1 di piani di uno determinato dei due sistemi su di essa, passanti pei singoli punti di C^4 e incidenti secondo rette a un piano fisso di sistema opposto; quindi gli S_2 -coni che da questi ultimi piani proiettano C^4 , e che si domanda siano fra loro omografici. Se C^4 appartiene a un S_4 , sostituiamo ai detti S_2 -coni gli S_1 -coni loro sezioni con questo S_4 , i quali saranno pure omografici. Queste proiettività fra gli S_1 -coni si rispecchieranno sulla C^4 nelle ∞^3 sue trasformazioni omografiche; e per queste sarà unito il sistema degli S_1 -assi di quei coni, e quindi la quadrica sezione di Q_4^2 che ne è luogo. Tale quadrica sarà perciò quella fondamentale per la polarità rispetto alla C^4 , e le cui rette, cioè gli assi anzidetti, sono le trisecanti della sviluppabile formata dalle tangenti di C^4 . Gli S_1 -coni avranno quindi 3 piani cuspidali, cioè la F^4 iniziale avrà una cubica di regresso; essa è dunque la sviluppabile delle tangenti di questa cubica.

Se invece la C^4 immagine della F^4 rigata sta in uno spazio S_3 , essa sarà proiettata secondo coni omografici da tutti gli ∞^2 punti della quadrica sezione di tale S_3 colla Q_4^2 . Le ∞^4 omografie fra queste coppie di coni, a 2 a 2, determineranno su C^4 un sistema continuo di trasforma-

zioni birazionali, che saranno o sole ∞^2 diverse, ciascuna ottenibile in ∞^2 modi, oppure la totalità ∞^3 , di cui una generica ottenibile in ∞^1 modi: ciascuna trasformante quindi ∞^2 o rispett. ∞^1 serie lineari g_4^2 segate da stelle di piani in altre consimili. E questo in ambo i casi implicherebbe che si trattasse di ∞^2 o rispett. ∞^3 trasformazioni proiettive sulla C^4 di S_3 ; il che non è possibile.

Concludiamo pertanto: Nello spazio S_3 , le sole superficie a sezioni piane collineari sono: 1° i coni; 2° le quadriche; 3° le rigate cubiche (a direttrici distinte, o anche coincidenti); 4° la sviluppabile delle tangenti di una cubica sghemba. Salvo talune superficie algebriche di ordine ≤ 4 , non vi sono dunque che coni.

All'infuori delle rigate cubiche a direttrici distinte, queste sono tutte superficie con ∞^3 o più trasformazioni proiettive in sè, fra le quali ve n'è qualcuna che muta l'una nell'altra due sezioni piane generiche qualsiasi; in altri termini, la collineazione fra queste sezioni è sempre determinata (subordinata) da un'omografia sulla superficie, all'infuori dell'unica eccezione delle rigate cubiche anzidette.

Analisi. — Di alcune trasformazioni funzionali. Nota del Socio S. PINCHERLE ⁽¹⁾.

Fra le trasformazioni che fanno corrispondere agli elementi di un dato spazio funzionale quelli di un altro spazio parimente dato, e che hanno carattere distributivo, emerge per importanza quella detta di Laplace-Abel, di cui non è mestieri ricordare le innumerevoli applicazioni. Come ho notato in ripetute occasioni, questa importanza deriva essenzialmente dal fatto che la trasformazione in discorso gode di una proprietà notevolissima e che in qualche modo la caratterizza: quella di trasformare nella derivazione l'operazione di moltiplicazione per la variabile, e reciprocamente. Ho considerato (e credo per il primo) questa proprietà dal punto di vista del calcolo funzionale, cioè come carattere essenziale di una trasformazione lineare fra due campi funzionali, e ciò in numerosi lavori di cui il primo risale al 1887 ⁽²⁾; e non è senza soddisfazione che ho veduto recentissimi lavori porsi allo stesso punto di vista, anche se le mie ricerche sono per avventura sfuggite agli autori ⁽³⁾.

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(2) *Sulla trasformazione di Laplace* « Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna », S. IV, T. VIII, 1887. Cfr. *Sull'inversione degli integrali definiti*, « Mem. della Società italiana delle Scienze, detta dei XL », S. III, T. XV, 1907.

(3) V. F. BERNSTEIN e G. DOETSCH, *Math. Zeitschrift*, Bd. 22, p. 285; G. DOETSCH, *Ibid.*, Bd. 22, p. 293, 1925.

Non sembra fuori di luogo il notare una distinzione fra due tipi di operazioni funzionali, in particolare lineari. Ad un primo tipo appartengono quelle che, operando sugli elementi di un dato campo funzionale, riproducono elementi del campo medesimo, generalizzando in qualche modo le omografie in spazi sovrapposti; a questo tipo appartengono di norma le operazioni integrali di Volterra e di Fredholm: una loro qualità essenziale, di cui il loro studio ampiamente si giova, è quello di essere in generale suscettibili di iterazione. La trasformazione di Laplace appartiene invece ad un altro tipo: essa trasforma generalmente un campo funzionale in un altro al tutto diverso; così se la trasformazione si dà in una delle forme usuali:

$$(1) \quad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt,$$

lo spazio funzionale delle $\varphi(t)$ è l'insieme delle funzioni della variabile reale t , date ed integrabili in ogni intervallo finito dell'intervallo $0 \dots \infty$ e infinite di un ordine non superiore all'esponenziale per $t \rightarrow \infty$; mentre lo spazio cui appartengono le $f(x)$ è quello delle funzioni o rami di funzioni analitiche regolari in ogni area finita contenuta almeno in un semipiano del piano della variabile complessa x . Solo sotto ipotesi restrittive per le funzioni $\varphi(t)$ il campo funzionale di queste (funzioni generatrici) può coincidere con quello della $f(x)$ (funzioni determinanti)⁽¹⁾ ed in tal caso si può parlare di iterazione della trasformazione; s'intende con ciò come il concetto di iterazione sia stato, per questa, meno sfruttato nelle applicazioni.

Un'altra operazione di questo secondo tipo, che, sebbene meno studiata della trasformazione di Laplace, offre però molto interesse, è quella detta *trasformazione di Eulero*: in essa, gli elementi $\sigma(t)$ ed $f(x)$, appartenenti generalmente a due campi funzionali distinti, sono legati da una relazione della forma:

$$(2) \quad f_x(x) = \int_{(c)} \frac{\sigma(t) dt}{(t-x)^{\alpha+1}};$$

qui è (c) una linea d'integrazione nel piano della variabile complessa t (o un intervallo sull'asse rappresentativo della variabile reale t), $\sigma(t)$ è funzione della variabile reale, parametro puntuale per la curva (c) ; mentre $f_x(x)$ è

(1) A queste denominazioni classiche gli autori citati nella Nota precedente sostituiscono quelle di « Oberfunktion » per la generatrice e di « Unterfunktion » per la determinante, chiamando altresì « Oberbereich » ed « Unterbereich » i rispettivi spazi funzionali.

funzione o ramo di funzione analitica regolare in un campo del piano x dipendente dalla natura di questa curva. Ma posto:

$$(3) \quad f(x) = \int_{(c)} \frac{\sigma(t) dt}{t-x},$$

la f_x non è, all'infuori del fattore $e^{\pi i \alpha} \Gamma(\alpha + 1)$, se non la derivata d'indice qualunque (reale o complesso) α , esclusi solo per α i valori interi negativi; la trasformazione (2) si ha dunque combinando la (3) coll'operazione di derivazione d'indice qualunque. La (3), detta *trasformazione di Heine*, acquista con ciò la importanza prevalente; ed è da notare il suo carattere eminentemente conservativo di fronte alle due operazioni elementari fondamentali: *moltiplicazione* per la variabile e *derivazione*. Difatti, dalle (3) la $t\sigma(t)$ è trasformata in $xf(x)$, all'infuori di una costante addittiva, e $\frac{d\sigma}{dt}$ è trasformata in $\frac{df}{dx}$, all'infuori di una funzione razionale addittiva semplice se (c) è curva aperta, e senz'altro se (c) è curva chiusa. Indicando simbolicamente con $f = L(\varphi)$ la trasformazione (1), con $f = H(\sigma)$ la (3), ed essendo D il simbolo di derivazione, si ha:

$$(4) \quad Df = -L(t\varphi), \quad xf = L(D\sigma),$$

e di qui l'estensione alla trasformazione della moltiplicazione per t^α nella derivazione d'indice qualunque⁽¹⁾, ed ancora:

$$(5) \quad Df = H(D\sigma) + \rho(x), \quad xf = H(t\sigma) + c,$$

essendo $\rho(x)$ una funzione razionale, c una costante, eventualmente entrambe nulle.

Il confronto delle (4) e (5) conduce a pensare che la trasformazione H possa essere l'iterata L^2 di L sotto restrizioni convenienti, e si trova che così è difatti⁽²⁾: ed ancora che, pure sotto restrizioni convenienti, L^2 possa essere l'operazione identica: e ciò appare nella formula integrale di CAUCHY.

La trasformazione H serve di base allo studio delle funzioni o rami di funzioni analitiche che ho detto *semplici* e che ho considerate di recente⁽³⁾.

(1) Cfr. la mia Nota: *Sulla generalizzazione di alcune trascendenti classiche*, n. 9. «Rendic. della R. Accad. di Bologna», seduta del 9 marzo 1924.

(2) V. «Rendiconti della R. Accad. dei Lincei», S. 5^a, T. 33, 1^o sem., fasc. 6^o, p. 203 (1924) e U. AMALDI, ibid., S. 5^a, T. 7, p. 117 (1898).

(3) «Rendiconti della R. Accad. dei Lincei», S. 5^a, T. 33, 1^o sem., fasc. 2^o; ibid., fasc. 6^o; ibid., fasc. 7^o-8^o (1924).

Colgo l'occasione per fare notare come il teorema del n. 1 della prima delle Note ora citate si possa estendere agevolmente alle derivate (d'indice α , dove α è un numero qualunque, esclusi soli gli interi negativi) della $f(x)$, cioè — il che è in sostanza lo stesso — alle espressioni della forma:

$$(6) \quad f_{\alpha}(x) = \int_1^{\infty} \frac{\sigma(t) dt}{(t-x)^{\alpha+1}}$$

e per svilupparne la dimostrazione, anche allo scopo di delucidare quella che al loc. cit. è data con soverchia concisione. Precisamente, è da mostrare come « se è convergente l'integrale:

$$(7) \quad b = \int_1^{\infty} \frac{\sigma(t) dt}{t^{\alpha+1}},$$

« è convergente la (6) per ogni x non appartenente al segmento t dell'asse « reale, compreso fra 1 e $+\infty$ ».

Si ponga, all'uopo:

$$(8) \quad \int_1^u \frac{\sigma(t) dt}{t^{\alpha+1}} = \tau(u);$$

questa, per essere la (7) convergente, è funzione limitata, e sia β il limite superiore di $|\tau(u)|$ fra 1 e $+\infty$. L'integrazione per parti dà:

$$(9) \quad \int_m^{m'} \frac{\sigma(t) dt}{(t-x)^{\alpha+1}} = \frac{\tau(m')}{\left(1 - \frac{x}{m'}\right)^{\alpha+1}} - \frac{\tau(m)}{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^{\alpha+1}} - \\ - (\alpha + 1) x \int_m^{m'} \frac{\tau(t) dt}{t^2 \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{\alpha+2}}.$$

Ora, essendo x fuori del segmento t , per i valori di t fra 1 e $+\infty$, $\left|1 - \frac{x}{t}\right|$ non è inferiore ad un numero positivo γ assegnabile (precisamente $|\sin \theta|$ se x è complesso di argomento θ , ed $1 - x$ se x è reale negativo, o positivo minor d'uno). Si ha dunque:

$$\left| \int_m^{m'} \frac{\tau(t) dt}{t^2 \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{\alpha+2}} \right| < \frac{\beta}{\gamma} \int_m^{m'} \frac{dt}{t^2} = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right),$$

che per $m' > m > M$ si può rendere piccolo a piacere; inoltre, siccome:

$$\frac{\tau(t)}{\left(1 - \frac{x}{t}\right)^{\alpha - r + 1}}$$

tende a b per $t \rightarrow \infty$, così la differenza espressa dai due primi termini di (9) si può pure, per $m' > m > M$, rendere in valore assoluto arbitrariamente piccola (M numero positivo sufficientemente grande). La convergenza dell'integrale (6) è così dimostrata.

La medesima dimostrazione vale anche a provare la convergenza uniforme, e quindi l'analiticità di f_x , in tutto il piano x tagliato secondo t .

In una recente Nota ⁽¹⁾, il dott. L. Fantappiè riconduce l'espressione di trasformazioni od operazioni lineari, ch'io ho date in forma di serie, a quella in forma di integrali definiti quale comparisce nella teoria generale del Volterra e nei lavori di Fredholm. È interessante il fatto che egli riconduce la possibilità di questa riduzione alle note condizioni, date da Picard, Lauricella, Amoroso, Severini ed altri per la risoluzione del problema dei momenti ⁽²⁾. Non sembra però del tutto giustificata l'asserzione, con cui Egli chiude la sua Nota, che la ragione di preferenza dell'espressione in forma di integrale, di fronte allo sviluppo in serie, stia in ciò: che l'integrale dà la trasformazione « in forma finita invece che sotto forma di serie ».

Ed invero l'integrale, come la serie, nasce dal passaggio al limite di una somma: ma in quello, gli addendi tendono ad avere la potenza del continuo, mentre nella serie essi tendono alla semplice potenza del numerabile. Ammetto volentieri invece, coll'Autore, che l'integrale possa in molti casi dare, in un campo più esteso del primitivo spazio funzionale di convergenza della serie, una specie di continuazione analitica della operazione rappresentate da questa: ma ciò non toglie che si sono potuti dare esempi di operazioni funzionali per le quali la rappresentazione per integrale è malagevole, per non dire impossibile. Desidero infine ricordare che, nello studio di codeste trasformazioni funzionali lineari, ho preso le mosse appunto da espressioni integrali alle quali ho dato, e credo per primo, il significato operatorio ⁽³⁾, e solo più tardi ho considerato le operazioni sotto forma di serie, ritenendo che mentre la prima forma ha maggiore efficacia nelle ricerche e le applicazioni d'indole quantitativa, come ha bene dimo-

(1) Questi « Rendiconti », S. VI, T. I, p. 70 (1925).

(2) La difficoltà sta però nella discussione della convergenza (7) della citata Nota.

(3) V. *Studi sopra alcune operazioni funzionali*, « Mem. dell'Accad. delle Scienze di Bologna », S. IV, T. 7, 1886, e *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies*, « Acta Mathem. », T. X, 1887.

strato l'opera del Volterra, la forma di serie si presti meglio allo studio qualitativo e, direi quasi, geometrico delle operazioni: per suo mezzo, si può mettere in luce nel miglior modo la genesi di un'operazione funzionale mediante le operazioni elementari di moltiplicazione, derivazione e sostituzione; infine, a giustificare l'interesse che possono destare queste serie, basta ricordare l'importanza della più semplice fra tutte, della serie di Taylor.

Matematica. — *Sul teorema di Green.* Nota del Socio corrisp. LEONIDA TONELLI⁽¹⁾.

Le condizioni più generali sotto le quali è stato sino ad ora dimostrato il teorema di Green, espresso dalla formula

$$(1) \quad \int_C P dx + Q dy = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

dove il contorno C del campo Γ è percorso in senso positivo, sono, per quanto riguarda le funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ (che, in tutta la presente Nota, si supporranno univocamente definite in Γ), le seguenti: 1°) continuità delle funzioni P e Q nel campo Γ ; 2°) assoluta continuità di $P(x, y)$, come funzione della sola y , per quasi tutti i valori di x ⁽²⁾, e assoluta continuità di $Q(x, y)$, come funzione della sola x , per quasi tutti i valori di y ; 3°) integrabilità⁽³⁾ superficiale, nel campo Γ , delle derivate parziali $P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$ e $Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}$, considerate là dove esistono finite⁽⁴⁾. In particolare le condizioni 2° e 3° possono essere sostituite con l'altra, che le P_y e Q_x esistano finite ovunque e siano superficialmente integrabili in Γ ⁽⁵⁾.

È indubbia la grande generalità delle condizioni rammentate; tuttavia restano, al di fuori di esse, dei casi importanti in cui sembra debba ancora sussistere la (1). Se, ad esempio, le funzioni P e Q sono continue, in tutto il campo Γ , e in esso ammettono, sempre finite, le derivate parziali P_y e Q_x , e se, di più, la differenza $Q_x - P_y$ è sempre continua, in tutto Γ ,

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(2) Cioè, per tutti i valori di x , del campo considerato, eccettuati al più quelli di un insieme di misura (lineare) nulla.

(3) Intendiamo *integrabilità* nel senso di Lebesgue (e quindi *assoluta integrabilità*).

(4) CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, t. II, 2^{ème} édit., 1912, p. 125.

(5) CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Réduction des intégrales doubles de Lebesgue*. («Bull. de l'Acad. roy. de Belgique», 1910, p. 792).

i due membri della (1) hanno significato ben determinato; e benchè, da quanto abbiamo più sopra richiamato, non si possa dedurre la validità della (1), tale validità si presenta come molto probabile⁽¹⁾.

Quando, supposte le P e Q ovunque continue, i punti, in prossimità dei quali viene a mancare una delle condizioni 2° e 3°, sono in numero finito, ammettendo l'integrabilità della differenza $Q_x - P_y$ in tutto Γ , la (1) si può dimostrare mediante l'esclusione dal campo degli intornoi dei punti singolari e la successiva riduzione a zero di tali intornoi. Ma questo procedimento non si può più seguire (in generale) se i punti singolari sono in numero infinito, e quindi non si può, per questa via, dimostrare che la (1) sussiste veramente nel caso dianzi accennato. Tuttavia tale caso verrà completamente risolto, insieme con altri più generali, dalla proposizione principale della presente Nota, alla quale proposizione si giungerà dopo avere generalizzato opportunamente un importante teorema di H. Looman. Da questa generalizzazione saranno anche dedotti alcuni risultati relativi alle funzioni analitiche.

1. H. Looman⁽²⁾ ha dimostrato recentemente che: « se le funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono continue nel campo Γ ; se, in ogni punto di Γ , sono sempre finiti i quattro numeri derivati estremi di P , considerata come funzione della sola y , e quelli di Q , considerata come funzione della sola x ; se, di più, è, in quasi tutto Γ , $P_y = Q_x$; allora vale l'uguaglianza

$$(2) \quad \int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0,$$

per ogni contorno rettangolare r , a lati paralleli agli assi x e y , tale che tutti i suoi punti e tutti i punti ad esso interni appartengano a Γ ».

Di tale notevole proposizione daremo qui la seguente generalizzazione:
Se:

α) $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono funzioni continue nel campo Γ ;

β) esclusi, al più, i punti appartenenti alle rette di un insieme numerabile, parallele agli assi x e y , in ogni altro punto interno al campo Γ la $P(x, y)$,

(1) Un esempio, molto semplice, in cui non è verificata la condiz. 3°, è dato dalle funzioni, considerate nel quadrato dei vertici $(0, 0)$ e $(1, 1)$, definite da

$$P = \int_0^y D_{\rho}(\rho^2 \sin \rho - 4) dy, \quad Q = \int_0^x D_{\rho}(\rho^2 \sin \rho - 4) dx,$$

dove è $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e D_{ρ} indica la derivata rispetto a ρ . Qui le P e Q sono continue e la differenza $Q_x - P_y$ è sempre $= 0$.

(2) *Ueber die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.* (« Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen », 1923, pp. 97-108).

considerata come funzione della sola y , e la $Q(x, y)$, considerata come funzione della sola x , hanno tutti i loro numeri derivati estremi finiti;

γ) in quasi tutti i punti interni di Γ , dove esistono finite le P_y e Q_x , è $P_y = Q_x$;

allora vale la (2), per ogni contorno rettangolare r , a lati paralleli agli assi x e y , e tale che tutti i suoi punti e tutti quelli ad esso interni siano interni al campo Γ .

Per dimostrare ciò, consideriamo l'insieme I dei punti del campo (chiuso) R , racchiuso dal contorno r , tali che in ogni loro intorno esista almeno un contorno rettangolare r' , analogo a r , giacente in R e soddisfacente alla disuguaglianza

$$\int_{r'} P dx + Q dy = 0.$$

L'insieme I è evidentemente chiuso. Si prova facilmente che la (2) vale per ogni contorno rettangolare r_1 , analogo a r e giacente in R , il quale non racchiuda nel suo interno punti di I ; e da ciò segue che ogni punto (x, y) di I è punto limite di punti (x', y') di I ; tali che $x' \neq x$ e $y' \neq y$ (1). Dunque, I è un insieme perfetto.

Essendo ancora r' un contorno rettangolare analogo a r e giacente in R , chiamiamo *porzione* di I , indicandola con $I(r')$, l'insieme perfetto dei punti di I che sono interni al contorno r' o che sono punti limiti di tali punti interni. Diciamo poi che $I(r')$ è una *porzione effettiva* di I se contiene effettivamente dei punti di questo insieme.

Poste queste definizioni, dimostriamo che, se I contiene effettivamente dei punti, si possono determinare una porzione effettiva $I(r')$ di I ed un numero positivo A , in modo che, per ogni punto (x, y) di $I(r')$ e per tutti gli h e k tali che $(x, y + h)$ e $(x + k, y)$ appartengano ad R , sia sempre

$$(3) \quad \left| \frac{P(x, y + h) - P(x, y)}{h} \right| < A, \quad \left| \frac{Q(x + k, y) - Q(x, y)}{k} \right| < A.$$

Indichiamo con E_n l'insieme dei punti (x, y) di I nei quali è, per tutti gli h e k tali che $(x, y + h)$ e $(x + k, y)$ appartengano ad R ,

$$(4) \quad \left| \frac{P(x, y + h) - P(x, y)}{h} \right| \leq n, \quad \left| \frac{Q(x + k, y) - Q(x, y)}{k} \right| \leq n,$$

n essendo un qualunque numero intero positivo. L'insieme E_n è chiuso, in virtù della continuità delle funzioni P e Q . Se uno degli E_n fosse denso

(1) Cfr. H. LOOMANN, loc. cit., pp. 101 e 102.

su tutta una porzione effettiva di I , esso conterrebbe questa porzione, e quanto abbiamo affermato sarebbe già provato. In caso contrario, detta a_1, a_2, a_3, \dots la successione delle rette considerate in β), formiamo la successione di insiemi $E_1, a_1, E_2, a_2, \dots$. Nessuno di questi insiemi può essere denso su tutta una porzione effettiva di I , e perciò, in virtù di un noto teorema di Baire⁽¹⁾, esiste almeno un punto di I al di fuori di tutti gli insiemi $E_1, a_1, E_2, a_2, \dots$. Ma ciò è impossibile, perchè, in un punto (x, y) di I non appartenente a nessuna delle rette a_1, a_2, \dots , i numeri derivati estremi di P , come funzione della sola y , e quelli di Q , come funzione della sola x , sono tutti finiti, e perciò in esso valgono le (4), per n sufficientemente grande, vale a dire, (x, y) appartiene sicuramente ad un E_n . Dunque quanto abbiamo affermato relativamente alle (3) è provato.

Dopo di ciò, si può dimostrare che su ogni contorno rettangolare, analogo ad r e racchiuso dal r' ora determinato, vale la (2)⁽²⁾. Di qui segue che $I(r')$ non può contenere nessun punto, e ciò prova che l'insieme I non può esistere. Ma se la (2) non valesse, si avrebbe, ripetendo un classico ragionamento, l'esistenza di almeno un punto di I ; dunque il nostro teorema è dimostrato.

2. Nelle ipotesi α), β) e γ) del n. 1, è

$$(5) \quad \int_t P dx + Q dy = 0,$$

per ogni contorno triangolare t , tale che tutti i suoi punti e tutti quelli ad esso interni siano punti interni di Γ . Ed infatti, con due sistemi di rette parallele all'asse delle x e all'asse delle y , è possibile di decomporre il triangolo T , di contorno t , in un certo numero di rettangoli, a lati paralleli agli assi x e y , e di triangoli rettangoli, a cateti pure paralleli agli assi x e y , e aventi l'ipotenusa su t . Applicando ai rettangoli della decomposizione il risultato del numero precedente, si ha che l'integrale di $P dx + Q dy$, esteso alla poligonale formata coi cateti dei triangoli rettangoli ottenuti, risulta uguale a zero. Ma questo integrale, quando si facciano tendere a zero le distanze fra le parallele dei sistemi considerati, tende al primo membro di (5); e tale uguaglianza risulta provata.

La (5) risulta allora dimostrata anche per ogni contorno poligonale non intrecciato, tale che tutti i punti ad esso interni siano punti interni di Γ ; e risulta dimostrata pure per ogni curva continua chiusa e rettificabile, priva di punti multipli, e tale che tutti i suoi punti e tutti quelli ad essa interni siano punti interni di Γ .

(1) R. BAIRE, *Leçons sur les fonctions discontinues*, 1905, p. 79.

(2) La dimostrazione è, con poche evidenti modificazioni, uguale a quella data dal LOOMANN alle pp. 105-106 della Nota citata.

3. Il procedimento seguito nel n.º 2, mostra che il teorema del n.º 1 vale anche se, in luogo della condizione β), si pone la seguente, più generale:

$\beta')$ esclusi, al più, i punti appartenenti alle curve di un insieme numerabile (continue, a tangente variabile in modo continuo e prive di punti multipli), in ogni altro punto interno al campo Γ la $P(x, y)$, considerata come funzione della sola y , e la $Q(x, y)$, considerata come funzione della sola x , hanno tutti i loro numeri derivati estremi finiti.

Ed infatti, ragionando come al n.º 2, si prova che l'insieme dei punti di una delle curve eccettuate, non può mai essere denso su tutta una porzione effettiva di I ; e ciò basta perchè la dimostrazione del n.º 1 possa ripetersi anche con la nuova ipotesi $\beta')$ (1).

Anche i risultati del n.º 2 valgono sostituendo β) con $\beta')$.

4. Diremo, in ciò che segue, che il contorno C di Γ è regolare, se è dato da una curva continua e rettificabile, decomponibile in un numero finito o in un'infinità numerabile di curve chiuse, prive di punti multipli, a due a due senza punti interni comuni, tali che tutti i loro punti interni siano punti interni di Γ , e che ciascuna di esse sia indefinitamente approssimabile con una poligonale chiusa, non intrecciata, di lunghezza sempre inferiore ad un numero fisso (che può essere comunque grande), racchiudente soltanto punti di Γ .

Posta questa definizione, quanto abbiamo dimostrato nei numeri precedenti ci autorizza ad enunciare la seguente proposizione:

Ammesse le ipotesi α) e γ) del n.º 1, e $\beta')$ del n.º 3, e supposto che il contorno C del campo sia regolare, è

$$\int_C P dx + Q dy = 0.$$

5. Possiamo ora dimostrare il teorema di Green nella nuova forma annunciata.

Supposto che il contorno C del campo Γ sia regolare;

ammesse le ipotesi α) e β) del n.º 1;

ammesso, infine, che la differenza $D = Q_x - P_y$ (2) sia superficialmente integrabile in Γ , e sia, in quasi tutto Γ la derivata parziale, rispetto a y (oppure rispetto a x), di una funzione $\Delta(x, y)$ soddisfacente alle stesse condizioni α) e β), poste per la P (oppure per la Q);

(1) Sarà opportuno osservare che il lemma delle pp. 103-104 della Nota citata del LOOMANN — proposizione necessaria per il completamento della dimostrazione del n.º 1. — vale anche sopprimendo l'ipotesi che la funzione $g(t)$, ivi considerata, sia differenziabile.

(2) Rileviamo qui che, in virtù della ipotesi β), le derivate parziali P_y e Q_x esistono finite in quasi tutto Γ .

allora è

$$(6) \quad \int_C P dx + Q dy = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Consideriamo l'integrale

$$\int_C (P + \Delta) dx + Q dy :$$

in quasi tutto Γ , è $(P + \Delta)_y = Q_x$, e perciò, per il n.º 4, tale integrale è $= 0$. È dunque

$$\int_C P dx + Q dy = - \int_C \Delta dx.$$

Ma, per l'ipotesi che D sia integrabile in Γ , risulta integrabile in Γ anche Δ_y ; e siccome, per il contorno regolare C e per $P \equiv \Delta$ e $Q \equiv 0$, vale il teorema di Green, nella forma rammentata nell'introduzione, abbiamo

$$\int_C \Delta dx = - \iint_{\Gamma} \Delta_y dx dy,$$

onde

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_{\Gamma} D dx dy,$$

vale a dire la (6).

6. Come caso particolare della proposizione precedente, si ha:

Se il contorno C del campo Γ è regolare; se valgono le ipotesi α) e β) del n.º 1; se, infine, la differenza $Q_x - P_y$, nei punti nei quali le P_y e Q_x esistono finite, coincide con una funzione D , continua in tutto Γ ; allora vale la (6).

Ed infatti, dall'ipotesi che la D sia continua segue l'integrabilità in Γ di $Q_x - P_y$. Inoltre, considerato un rettangolo qualsiasi R , a lati paralleli agli assi x e y , contenente nel suo interno tutto il campo Γ , è possibile di definire una funzione D_1 , continua in tutto R , la quale coincida con la D in Γ ⁽¹⁾. E se a è la minima ordinata dei punti di R , la funzione

$$\Delta(x, y) = \int_a^y D_1 dy$$

(1) V. p. es. i miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I, p. 383.

è continua in tutto R e quindi in Γ , ed ammette la derivata parziale $\Delta_y = D_1$, sempre finita e continua, e coincidente, in quasi tutto Γ , con $Q_x - P_y$.

7. Per il teorema di Morera, da quanto abbiamo dimostrato nel n.º 4, discende una generalizzazione di un risultato ottenuto da R. Looman, nella Nota citata, relativo alle funzioni analitiche. Abbiamo precisamente:

Se, in un campo aperto e connesso Γ , della variabile complessa z , è definita una funzione $f(z)$, univoca e continua;

se, posto $z = x + iy$ e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ soddisfano alla condizione $\beta')$ del n.º 3;

se, infine, è, in quasitutto Γ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1);$$

la funzione $f(z)$ è analitica regolare in tutto il campo Γ .

In particolare:

Si può asserire che una funzione $f(z)$, della variabile complessa z , univoca e continua nel campo aperto e connesso Γ , è, in tale campo, certamente analitica regolare quando si sappia che essa ha la derivata $f'(z)$ finita in tutti i punti di Γ , eccettuati, al più, quelli di un insieme numerabile, oppure quelli appartenenti alle curve (continue, a tangente variabile in modo continuo e prive di punti multipli) di un insieme numerabile.

In questo enunciato, generalizzazione di un noto teorema di Goursat, si può sostituire la derivata $f'(z)$ con le due derivate di $f(z)$ nelle direzioni degli assi x e y , imponendo, in più, l'uguaglianza di queste derivate.

Fisica. — *Sui fondamenti sperimentali del principio balistico sulla velocità della luce.* Nota del Corrisp. M. LA ROSA ⁽²⁾.

In una Nota comparsa sulla « Zeitschrift fur Physik », il prof. H. Thirring ⁽³⁾ rivolge due obiezioni ai miei recenti lavori: l'una di ordine generale, che vorrebbe intaccare la legittimità dell'applicazione del principio balistico alla velocità della luce; l'altra, d'indole particolare, metterebbe in luce una discordanza quantitativa, con le osservazioni astronomiche, a cui andrebbe incontro la « teoria delle variabili », che sulla base di questo principio ho stabilito.

(1) L'esistenza e la finitezza di tutte queste derivate parziali, in quasitutto Γ , è una conseguenza della ipotesi β' .

(2) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(3) Gennaio-febbraio 1925.

Cominciamo ad esaminare la prima.

Il prof. Thirring - riferendosi alla questione dell'effetto Doppler, già dibattuta fra il prof. De Sitter e me - riconosce che il moto d'insieme della sorgente luminosa non può dare luogo ad altri spostamenti delle righe spettrali, oltre quelli previsti dalla teoria ordinaria di quell'effetto; ma rileva che il nuovo termine dipendente dall'accelerazione, che la teoria balistica viene ad introdurre nel calcolo, non può mancare di farsi sentire, quando si prenda in considerazione il moto termico delle particelle emittenti. E ciò a causa dei valori assai grandi che l'accelerazione raggiunge in tale caso.

Per maggiore chiarezza conviene riferire il calcolo del prof. Thirring:

Consideriamo - egli dice - un *atomo emittente*, il quale possieda un movimento accelerato nella direzione della visuale. Emetta esso, fra gli istanti t e $t + dt$ un *treno d'onde coerenti*. La velocità dell'atomo rispetto all'osservatore abbia all'istante t il valore u , ed all'istante $t + dt$, il valore $u + du$. Sia Δ la distanza fra sorgente ed osservatore. I tempi di arrivo T e $T + dT$ degli « estremi » del treno considerato secondo l'ipotesi balistica, sono dati da:

$$T = t + \frac{\Delta}{c + u}; \quad T + dT = t + dt + \frac{\Delta}{c + u + du}$$

Da queste equazioni, supponendo Δ assai grande rispetto a $u \cdot dt$ e trascurando i termini di ordine superiore, il prof. Thirring trae:

$$dT = dt - \frac{\Delta}{c^2} du$$

Ciò posto, tenuto conto della piccolezza dell'intervallo di coerenza dt , riconosce il prof. Thirring che il termine $\frac{\Delta}{c^2} du$ risulta trascurabile per i movimenti d'insieme delle *stelle doppie*, cioè riconosce (contrariamente all'opinione del prof. De Sitter, ed in conformità della mia) che nessuna anomalia deve presentare l'effetto Doppler delle *doppie* per questo nuovo termine che l'ipotesi balistica introduce; ma, osservando che il moto termico dell'*atomo emittente* va soggetto a cambiamenti di velocità molto e molto più grandi - a causa degli urti -, prevede l'esistenza di grandiosi spostamenti di righe, praticamente inammissibili.

Applicando, infatti, il risultato del calcolo a un *atomo emittente* che si trovi sul Sole (cioè ponendo per Δ la distanza Terra-Sole) fa vedere che un treno d'onde visibili emesso nel momento dell'urto deve giungere all'osservatore terrestre *capovolto* (cioè con la coda prima e la testa dopo) e con lunghezza d'onda di *alcuni centimetri*; e conclude così: « l'ipotesi ba-

listica nella sua conseguente enunciazione *viene dunque contraddetta dal semplice fatto che la radiazione del Sole possiede uno spettro visibile con righe spettrali nette* ».

Non insisterò sugli argomenti altra volta da me sviluppati ⁽¹⁾ per rivedere e precisare, sul terreno dell'ipotesi balistica, le basi di calcolo dell'effetto Doppler. Mi limito ad osservare che il *treno d'onde coerenti* che egli considera, perde, a causa dell'ipotesi, la sua coerenza e quindi il valore ed il significato che sono davanti alla mente del prof. Thirring; e ciò è provato dal risultato che egli stesso trova: che il gruppo di oscillazioni supposto resta profondamente perturbato durante la propagazione, poichè i diversi elementi si distanziano in misura differente nel tempo e nello spazio, si accavallano e si capovolgono. Ma a parte tutto ciò, importa qui di *affermare recisamente* che queste conclusioni del Thirring, posto pure che siano indiscutibili, *non scuotono di una virgola le basi della teoria balistica della luce*.

È a tutti noto, che le conoscenze a cui siamo pervenuti intorno al *meccanismo dell'emissione*, ci consentono di pensarlo *come indipendente dall'urto dell'atomo emittente*, contro un qualsiasi ostacolo.

Pertanto, mentre nulla può vietarci di pensare che un atomo *emette nel momento stesso* in cui subisce un urto termico, nulla egualmente ci autorizza a pensare che *tutti gli atomi possono e debbono emettere solo nel momento della collisione*. Dunque nel numero sterminato di atomi di cui è composto il Sole (come qualsiasi sorgente) avverrà certamente che *alcuni* emettono nel momento stesso della collisione; e siccome gli atomi possiedono velocità in *tutte le direzioni* avverrà che *una piccola frazione* soltanto di questo numero potrà avere velocità poco inclinate sul raggio visuale r , e potrà dare luogo a componenti $\left(\frac{du_r}{dt}\right)$ abbastanza cospicue per generare l'effetto voluto dal

Thirring. Ma tutto ciò — stando al calcolo stesso di questo A. — non conduce ad altro *risultato conseguente* che questo: *che una piccola frazione della luce emessa da una sorgente* — supposta anche perfettamente monocromatica — *deve presentarsi* ad un osservatore posto a conveniente distanza, *sotto tutte le frequenze possibili*. Conclusione, questa, assai ed assai diversa da quella enunciata dal prof. Thirring, *in base alla considerazione di un solo atomo in collisione!* Essa è di tale natura da lasciarci più che tranquilli intorno alla possibilità che abbiamo — e che la mia teoria non pregiudica affatto — di osservare *righe nette* nello spettro del Sole; non solo, ma è di tale natura da lasciarci ampia possibilità di ammettere l'esistenza di spettri di righe, di origine terrestre e celeste; poichè tutto ciò che ci porta di nuovo è questo: la necessità di ammettere che se la distanza della sorgente dal-

(1) « Rend. Lincei », vol. XXXIII, s. 5, 2° sem., 1924; « Astr. Nachr. ». Nr. 5319, Bd. 222, sept. 1924.

l'osservatore è smisuratamente grande, oppure se le $\frac{du}{dt}$ sono smisuratamente grandi — come quelle che in certe condizioni possono presentarsi negli urti termici — lo spettro di righe deve essere accompagnato da un fondo spettrale, più o meno intenso, continuo.

Se questa conclusione sia contraddetta o piuttosto confortata, *brillantemente confortata*, dalla più semplice ed immediata osservazione spettrale, ognuno potrà giudicare!

Dall'obiezione d'indole fisica il *principio balistico esce dunque rafforzato*. Esaminiamo l'altra, d'indole astronomica.

Secondo questa, non il principio balistico, ma l'applicazione fattane alla teoria delle stelle variabili verrebbe *clamorosamente* contraddetta dal materiale astronomico attualmente disponibile! In appoggio di questa sua affermazione il prof. Thirring cita alcuni risultati contenuti nel « Third Catalogue of Spettroscopic Binary Stars » di Lick ⁽¹⁾.

Si tratterebbe di parecchie stelle doppie le quali pur essendo *delle variabili* presentano il prodotto $Kb > 1$; alcune, anzi, alquanto maggiore di 10; mentre la mia teoria prevede che quel prodotto deve soddisfare alla limitazione:

$$0,02 < Kb < 5$$

e deve essere prossimo a $1/2\pi$, quando l'ampiezza di variazione è molto grande.

Come è naturale mi sono procurato questo recente catalogo, ma non vi ho trovato gli elementi che hanno permesso al prof. Thirring di pronunciare la sua *clamorosa* condanna.

In primo luogo osservo, che le cinque stelle su cui egli discute (R. Z. Cass.; W. W. Aur.; S. Ant.; W. Ur. Ma.; U. Herc.) sono del tipo Algol, cioè sono delle *variabili a tipo discontinuo*, per le quali è stata sviluppata la *spiegazione dell'ecclissi*; spiegazione che la mia teoria non vuole, e *non può escludere* dal suo seno, come ho fatto chiaramente osservare nella mia risposta ad una recente critica del sig. Salet ⁽²⁾. Ed ho spiegato in questo mio scritto ⁽³⁾ che il fenomeno dell'ecclissi resta indipendente dall'ipotesi balistica, e quindi *svincolato completamente* da ogni condizione relativa al valore di Kb , e perciò anche da ogni vincolo con la velocità orbitale.

La presenza del fenomeno della variabilità negli esempi addotti nulla dunque prova contro l'ipotesi balistica.

La sola circostanza che resterebbe in campo contro la mia teoria si riduce dunque al comportamento delle righe spettrali in ordine al loro stato di espansione ed al loro movimento. Ma a proposito di questi calcoli

(1) « Lick Obser. Bull. », n. 355.

(2) « C. R. », t. 180; n. 9, marzo 1925.

(3) Memorie della Soc. Astr. Ital. (in corso di stampa).

numerici (dei valori di Kb) fatti dal Thirring basta di richiamare l'attenzione dei fisici sopra un elemento estremamente precario, e pure essenziale, che inficia tutti i risultati: la parallasse stellare, dalla quale si deve dedurre il valore di Δ , e quindi di K ($K = \frac{\text{tempo di propagazione dei raggi}}{\text{periodo di rotazione della stella}}$).

Il catalogo di Lick sopra citato *non contiene traccia di questo essentialissimo elemento*; ed il prof. Thirring non ha avuto cura di citare le fonti da cui egli ha attinto i suoi numeri, che conviene avere sott'occhio, e che perciò trascrivo:

Nome	R Z Cass.	W W Aur.	S Aut.	W Ur. Ma.	U Herc.
Parallasse . . .	0".029	0".012	0".007	0".010	— 0".023

Ho cercato, perciò, di controllarli per conto mio, e sono riuscito a trovare la parallasse indicata per W Ur. Ma. in una raccolta di dati astronomici relativi alle velocità radiali ⁽¹⁾. Ma mentre questa semplice trascrizione non dice proprio nulla, assai istruttiva riesce la consultazione — e lo studio — di qualche buon lavoro dedicato alle recenti misure di parallasse.

Quello che ho avuto sottomano è un bel lavoro dell'Osservatorio Yerkes, ed è intitolato *Stellar parallaxes derived from photographs made with the forty-inch refractor* ⁽²⁾. Si tratta dunque di misure fatte con il migliore metodo e con uno dei migliori strumenti del mondo!

In questo lavoro ho potuto trovare solamente le misure relative alle W Ur. Ma. Il risultato delle quali è così dato:

$$\pi = 0'',008 \pm 0'',010$$

cioè, con un valore di 8 millesimi di secondo d'arco ⁽³⁾, affetto da un errore probabile più grande del valore misurato!

E non si creda che sia questo un caso eccezionale, perchè analoghe in tutto sono le altre misure riportate.

Tanto per illuminare i non competenti sulle difficoltà e l'incertezza che dominano in questo campo di misure, trascrivo dal lavoro in parola i risultati trovati con i differenti metodi per la parallasse della stella di Argelander-Oeltzen:

(1) First Catal. of rad. vel. by J. Voûte. Bosscha Sternw. Lemgeng (Java).

(2) «Public. of the Yerkes Obs.», vol. IV, par I, nov. 1917.

(3) È bene tenere presente che nel lavoro dell'Osservatorio Yerkes da me esaminato ad ogni divisione della scala di $\frac{1}{4}$ di mn. corrispondeva un angolo di $2'',66$; cioè per $\Delta\mu$ un angolo di $0'',0106$.

Parallasse	Err. probab.	Osservatore
0'' . 247	0'' . 021	Krueger
0 . 111	0 . 027	Schweizer — Socoloff
0 . 191	0 . 030	» »
0 . 147	0 . 020	» »
0 . 22	0 . 050	Flint
0 . 35	0 . 051	»
0 . 269	0 . 012	Davidson
0 . 217	0 . 006	Lie e Van Biesbroeck

È quasi superfluo richiamare l'attenzione del lettore sull'ordine di grandezza dei numeri della prima colonna, che è dieci e più volte maggiore della maggiore delle parallasse date dal Thirring; e sugli scarti fra i singoli valori, che sono *tanto più grandi degli errori probabili* segnati nella seconda colonna!

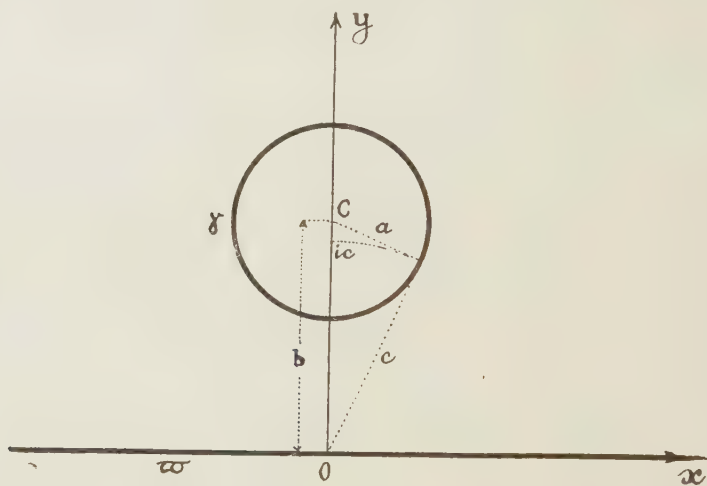
Ora volere fare assegnamento su misure di questo genere per dare un giudizio decisivo sull'accettabilità di una teoria, mi pare cosa assai ardita; specialmente quando si pensi che questo giudizio viene ad urtare contro un edificio assai semplice ma assai saldo, nel quale i fatti molteplici (fotometrici, spettroscopici, statistici) osservati su migliaia di stelle, hanno trovato per la prima volta ordine e luce; contro un edificio che appena sorto ha avuto la fortuna della più brillante conferma, nella scoperta di un compagno e del movimento periodico delle righe spettrali di Mira Ceti!

E chiudo non senza insistere ancora un momento su questa *pretesa possibilità* di una verifica quantitativa; essa potrà farsi, ma in pochi casi soltanto — per le stelle a grande parallasse — e dopo una serie lunga e completa di osservazioni appositamente istituite. L'incertezza enorme che regna nelle misure delle parallasse non scompare, infatti, in quelle delle velocità — dove fino a pochi mesi sono, insigni osservatori escludevano la presenza delle variazioni periodiche cospicue della velocità di Mira. — E questa incertezza getta qualche ombra perfino nelle misure più facili e più immediate: in quelle del periodo del cambiamento di luce; a proposito del quale fino a poco tempo fa esistevano ancora gravi dispareri proprio per le stelle *S Ant. e W Ur. Ma.*⁽¹⁾ su cui il prof. Thirring crede di potere fare tanto assegnamento.

(1) L'opera magistrale di MUELLER e HARTWIG; « Geschichte und Literatur des Lichtwechsels », (Leipzig, Poeschel u. Trepte) finita di pubblicare nel 1922 porta per il periodo di queste stelle valore differenti da quelli segnati nel catalogo di ZVAK.

Idromeccanica. — *Effetto dinamico di una corrente che fluisce tra un cilindro e una parete piana indefinita.* Nota del Corrisp. U. CISOTTI ⁽¹⁾.

Si abbia un solido cilindrico circolare indefinito a generatrici parallele a una parete rigida piana, pure indefinita. Il cilindro è immerso in un fluido incompressibile, di densità costante unitaria, che occupa il semispazio limitato dalla parete piana. Il fluido circoli, in modo permanente, attorno al cilindro, e si immagini che in ogni sezione piana, normale alle generatrici, il moto avvenga nello stesso modo, essendo le caratteristiche del moto identiche sopra ogni retta normale alla sezione. Basta allora riferirsi al moto in questa sezione: si ha una corrente che circola attorno a un disco circolare, scorrendo tra il disco stesso e una parete rigida rettilinea indefinita.



Si assuma questa retta come asse x , e sia $y \geq 0$ il semipiano occupato dal fluido e dal disco, l'asse y passando per il centro C del disco. Sieno: a il raggio del disco e $b > a$ la distanza del centro C dalla parete rettilinea, dimodochè

$$(1) \quad x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

è l'equazione della circonferenza γ , contorno del disco,

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

Scopo della presente Nota è di mettere in rilievo che le pressioni dinamiche esercitate dalla corrente circolatrice sul contorno γ equivalgono a una forza unica, applicata nel centro C , normale e diretta alla parete e la cui intensità è:

$$(2) \quad R = \frac{C^2}{4\pi\sqrt{b^2 - a^2}},$$

essendo C la circolazione ⁽¹⁾. Questa è legata alla portata q della corrente dalla relazione:

$$(3) \quad \frac{4\pi q}{C} = \log \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Risulta dalla (2) che $R \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$, cioè quando la parete è infinitamente lontana e quindi la corrente circola attorno al disco isolato. Quest'ultima circostanza è contenuta del resto, nel noto teorema di Kutta-Joukowski ⁽²⁾, secondo il quale se il profilo è investito da una corrente di velocità assintotica \mathbf{V} e la circolazione attorno al profilo è C , la risultante delle pressioni dinamiche è normale alla direzione assintotica della corrente, di valore VC e il verso si ottiene facendo ruotare il versore di \mathbf{V} di 90° nel senso inverso della circolazione. Questa risultante è nulla se $\mathbf{V} = 0$, cioè quando il profilo è sottoposto alla sola corrente circolatrice. È da rilevarsi la circostanza che mentre nel teorema di Kutta-Joukowski è essenziale per l'esistenza di un'azione dinamica sul profilo rigido che questo venga investito (oltre che dalla corrente circolatrice) anche da una corrente

(1) È noto [H. BLASIUS, *Stromfunktionen symmetrischer und unsymmetrischer Flügel in zweidimensionaler Strömung*. «Zeitschr. f. Math. u. Phys.», B. 59 (1911), p. 225] che l'azione della circolazione su di un vortice, o su di una qualsiasi delle linee di flusso chiuse racchiudente il vortice, si riduce a una forza normale e diretta verso la parete

indefinita, e di intensità $\frac{C^2}{4\pi c}$, essendo c la distanza del vortice dalla parete. Ma la ubicazione di tal vortice è *a priori* incognita per un dato profilo, poichè essa è essenzialmente subordinata alla forma del medesimo (nel profilo circolare il vortice è nel punto interno *ic* — vedi figura). Un altro elemento che dipende essenzialmente dalla forma del profilo e dalla sua ubicazione rispetto alla parete è la relazione che deve intercedere tra la portata della corrente e la circolazione (vedi la formula (3), nel caso del profilo circolare).

(2) JOUKOWSKI, *Aerodynamique*. [Paris, Gauthier-Villars, 1916; tradotto dal russo da DRZEWIESKI; Cap. VI]. Una dimostrazione e interessanti complementi di questo teorema si trovano in BURGATTI, *Sopra un teorema di Joukowski relativo alla forza sostentatrice dei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido*. «Rend. delle Sessioni della R. Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna», Vol. XXII (1917-1918), pp. 55-64. Vedasi anche la recentissima Monografia di Mario Pascal «Le ricerche aerodinamiche di Kutta e di Joukowski». [Napoli, Pellerano, 1925].

che all'infinito è in regime uniforme nel teorema più sopra enunciato è essenziale la presenza della parete rigida, per ottenere l'effetto dinamico sul profilo rigido. Naturalmente l'effetto dinamico sulla parete rettilinea w è opposto al precedente.

Si comprende come il teorema si possa estendere a quelle forme di profili rigidi che risultano per corrispondenza conforme col semipiano del moto da me considerato.

1. - LA CORRENTE CIRCOLATORIA. — Sieno: φ il potenziale di velocità, ψ la funzione di corrente, u e v le componenti cartesiane della velocità; le funzioni

$$(4) \quad f = \varphi + i\psi \quad , \quad w = u - iv,$$

della variabile complessa $z = x + iy$, sono notoriamente⁽¹⁾ legate tra di loro dalla relazione:

$$(5) \quad w = \frac{df}{dz}.$$

Poniamo:

$$(6) \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} \quad , \quad k = \frac{1}{2} \log \frac{b + c}{b - c};$$

la funzione che definisce la corrente è la seguente:

$$(7) \quad f = \frac{q}{ik} \log \frac{\tilde{z} - ic}{\tilde{z} + ic},$$

designando q la portata.

Infatti, posto

$$z - ic = re^{i\theta} \quad , \quad z + ic = r'e^{i\theta'}$$

si ha

$$f = \varphi + i\psi = \frac{q}{k} \left(\theta - \theta' - i \log \frac{r}{r'} \right),$$

da cui

$$(8) \quad \varphi = \frac{q}{k} (\theta - \theta') \quad , \quad \psi = -\frac{q}{k} \log \frac{r}{r'}.$$

Essendo

$$r = \sqrt{x^2 + (y - c)^2} \quad , \quad r' = \sqrt{x^2 + (y + c)^2},$$

tenendo conto delle (6) e della (1), facilmente si deduce che

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{sulla parete } y = 0, \\ q, & \text{sul profilo circolare } \gamma. \end{cases}$$

(1) Cfr., per es. la mia *Idromeccanica piana*. Milano, Libreria Editrice Politecnica. Parte prima (1921), Cap. II.

Scende da questa che q è la portata della corrente che scorre tra il profilo e la parete rigida; per la (5), dalla (7) si deduce:

$$(9) \quad w = \frac{q}{ik} \left\{ \frac{1}{z - ic} - \frac{1}{z + ic} \right\} = \frac{2qc}{k(z^2 + c^2)},$$

la quale mostra che la velocità si comporta regolarmente in tutti i punti del semipiano $y \geq 0$, esteriori al profilo γ e che si annulla all' ∞ . Si può pertanto concludere che la (7), e per essa la (9), definiscono un moto regolare attorno il profilo γ nel semipiano in discorso. Dalla seconda delle (8) risulta che le linee di flusso sono circonferenze i cui centri appartengono all'asse y .

2. - CIRCOLAZIONE. — La circolazione C relativa a una qualunque linea chiusa che abbraccia il profilo γ eguaglia quella relativa allo stesso γ , per cui si può scrivere:

$$C = \int_{\gamma} (u dx + v dy),$$

l'integrazione andando effettuata nel senso del flusso. Poichè

$$w d\zeta = (u - iv)(dx + idy) = u dx + v dy + i(udy - v dx),$$

essendo sopra γ , trattandosi di linea di flusso,

$$udy - v dx = 0,$$

si ha senz'altro:

$$(10) \quad C = \int_{\gamma} w d\zeta.$$

Come risulta dalla (9), la funzione w , considerata entro γ , ha un polo nel punto $z = ic$, per cui l'integrale del secondo membro è uguale al prodotto di $2\pi i$ per il residuo di w , che, come risulta dalla (9), è $\frac{q}{ik}$; pertanto la precedente diviene:

$$(11) \quad C = \frac{2\pi q}{k}$$

che, per le (6), danno luogo alla relazione (3).

3. - AZIONI DINAMICHE DELLA CORRENTE SUL PROFILO γ . — Indichiamo con R_x, R_y le componenti cartesiane della risultante delle pressioni dina-

niche esercitate sugli elementi $d\gamma$ del profilo, dalla corrente fluida, e con M il rispettivo momento (normale al piano del moto) rispetto all'origine; applicando le formule di Blasius ⁽¹⁾ si ha:

$$(12) \quad R_y + iR_x = -\frac{1}{2} \int_{\gamma} w^2 d\bar{z},$$

l'integrazione lungo γ dovendo eseguirsi in modo da lasciare alla sinistra il campo circolare racchiuso da γ , mentre M è la parte reale di $-\frac{1}{2} \int_{\gamma} w^2 \bar{z} d\bar{z}$, il che si esprime scrivendo:

$$(13) \quad M = -\frac{1}{2} R \int_{\gamma} w^2 \bar{z} d\bar{z}.$$

Avendosi dalla (9):

$$w^2 = -\frac{q^2}{k^2} \left\{ \frac{1}{\bar{z} - ic} - \frac{1}{\bar{z} + ic} \right\}^2,$$

si deduce immediatamente che i residui delle funzioni w^2 e $w^2 \bar{z}$, rispetto al polo $\bar{z} = ic$, sono rispettivamente $\frac{q^2}{ick^2}$ e $\frac{q^2}{k^2}$, per cui

$$\int_{\gamma} w^2 d\bar{z} = \frac{2\pi q^2}{ck^2}, \quad \int_{\gamma} w^2 \bar{z} d\bar{z} = 2\pi i \frac{q^2}{k^2},$$

e per queste, le (12) e (13) danno rispettivamente:

$$(14) \quad R_x = 0, \quad R_y = -\frac{\pi q^2}{ck^2}, \quad M = 0,$$

le quali, tenuto conto della (11) e delle (6), contengono i risultati annunciati.

4. - AZIONI DINAMICHE DELLA CORRENTE SULLA PARETE RETTILINEA ω . — Chiamando R'_x e R'_y le componenti cartesiane della risultante delle pressioni dinamiche sopportate dalla parete rigida ω , da parte della massa fluida, e con M' il momento delle pressioni stesse, rispetto all'origine, si avrà, per le citate formule di Blasius:

$$(15) \quad R'_y + iR'_x = \frac{1}{2} \int_{\omega} w^2 d\bar{z}, \quad M' = \frac{1}{2} R \int_{\omega} w^2 \bar{z} d\bar{z},$$

(1) Cfr., ad es. la mia *Idromeccanica piana*. Parte seconda, N. 105.

l'integrazione su ω andando effettuata nel senso delle x crescenti. Le funzioni w^2 e $w^2\chi$ sono regolari nel semipiano $y \geq 0$ esterno al profilo γ , per cui pel teorema di Cauchy si ha:

$$\int_{\omega} w^2 d\chi = \int_{\gamma} w^2 d\chi \quad , \quad \int_{\omega} w^2 \chi d\chi = \int_{\gamma} w^2 \chi d\chi,$$

le integrazioni lungo γ andando effettuate in modo da lasciare alla sinistra l'area circolare. Confrontando colle (12) e (13) si ottiene:

$$R'_y + iR'_x = -(R_y + iR_x) \quad , \quad M' = -M,$$

e, per le (14):

$$R'_x = 0 \quad , \quad R'_y = \frac{\pi q^2}{ck^2} \quad , \quad M' = 0.$$

Dunque l'azione dinamica complessiva della corrente sulla parete ω è opposta a quella che la corrente medesima esercita sul profilo γ ; e ciò doveva essere.

Fisica. — *L'influenza di un campo magnetico sul funzionamento d'una lampada a tre elettrodi.* Nota di O. M. CORBINO ed E. PERSICO⁽¹⁾.

È noto che in una lampada a *due* elettrodi, costituita da un filamento rettilineo e da una placca cilindrica coassiale, un campo magnetico uniforme e costante, parallelo al filamento, produce, se superiore a un certo valore critico, la soppressione completa della corrente termoionica, mentre un campo inferiore a quel valore critico altera assai poco il valore della corrente. Ci è parso interessante ricercare l'effetto prodotto in condizioni analoghe da un campo magnetico su una lampada a *tre* elettrodi, costituita da un filamento rettilineo e da una griglia e una placca cilindriche e coassiali con esso. È evidente che anche in questo caso un campo intenso sopprimerà del tutto la corrente di placca. Ma — a parte questo caso estremo — era interessante ricercare l'effetto di un campo moderato, tale cioè da permettere ancora a un notevole numero di elettroni di raggiungere la placca.

Dal punto di vista intuitivo si può prevedere che il campo avrà un duplice effetto:

1°) Le traiettorie degli elettroni non saranno più rettilinee ma avranno andamento spiraliforme: quindi il cammino degli elettroni sarà *allungato*.

(1) Presentata nella seduta del 5 aprile 1925.

D'altra parte la velocità posseduta dall'elettrone a una data distanza dal filamento dipende solo dal potenziale elettrico, e non viene alterata dal campo magnetico: quindi, complessivamente, la durata del tragitto degli elettroni risulterà *aumentata* per effetto del campo. Ciò significa che nello spazio filamento-placca si creeranno, per la presenza del campo magnetico, delle nuove cariche spaziali negative, che contribuiranno a diminuire la corrente di placca j , producendo lo stesso effetto di un abbassamento di potenziale di griglia u o, ciò che è lo stesso, di quello di placca v (poichè, come è noto, le variazioni della corrente di placca, sono una funzione della sola combinazione $v + ku$). In altre parole, il campo magnetico produrrà uno spostamento complessivo della caratteristica $u-j$ verso le u positive, portando la caratteristica stessa a sovrapporsi quasi esattamente ad una caratteristica corrispondente ad una tensione di placca un poco più bassa.

2°) Si può poi prevedere che la caratteristica sarà non solo spostata, ma anche deformata, nel senso che il tratto rettilineo ascendente acquisterà una pendenza maggiore. E invero tale pendenza è determinata dall'incremento che produce sulla corrente di placca un piccolo aumento della tensione di griglia. Ora, finchè si è al disotto della corrente di saturazione, la corrente di placca è determinata da questa condizione, che le cariche spaziali rappresentate dagli elettroni in viaggio tra filamento e placca — e soprattutto tra filamento e griglia — annullino esattamente, alla superficie del filamento, il campo prodottovi per influenza della griglia e della placca. E un piccolo aumento del potenziale di griglia in tanto aumenta la j in quanto rende più intenso il campo da compensare, mentre d'altra parte, accelerando il moto degli elettroni all'interno della griglia, dirada le cariche spaziali immediatamente circostanti al filamento (che sono le più dense e le più efficaci): due fatti che concorrono entrambi ad aumentare la corrente di placca. Ma in presenza di un campo magnetico, a queste cause se ne aggiunge una terza, che pur essa concorre ad aumentare la j . Infatti, quando esiste il campo, un aumento del potenziale di griglia produce non soltanto un aumento della velocità degli elettroni tra filamento e griglia, ma anche un *accorciamento* del cammino che essi devono percorrere, in quanto le traiettorie saranno meno incurvate: questo accorciamento contribuisce anch'esso a diminuire la durata del tragitto, e quindi la densità delle cariche spaziali, il che rende necessario, come si è detto, un aumento della j . Si vede dunque che uno stesso incremento della u produrrà un aumento della j maggiore quando vi è il campo che non nel caso contrario.

Le fotografie che pubblichiamo confermano queste previsioni di carattere intuitivo. La fig. 1 rappresenta la caratteristica di placca a tensione di placca costante — cioè la curva $u-j$ — in presenza di un campo di circa 220 gauss, e in assenza di campo. Esse sono state rilevate per mezzo di un tubo di Braun in cui il fascetto catodico, passando tra due piatti collegati al filamento e alla griglia della lampada in esame, subiva una devia-

zione elettrostatica orizzontale proporzionale alla tensione di griglia, mentre una bobina inserita sul circuito di placca produceva sul fascetto una deviazione magnetica in senso verticale, proporzionale alla corrente di placca. Tra filamento e placca era applicata una tensione costante di circa 200 volti, mentre tra filamento e griglia era applicata la d. d. p. alternata, fornita dalla rete stradale, del valore massimo di circa 140 volti. La lampada (del comune tipo francese) era posta tra i poli di un elettromagnete, e le due fo-

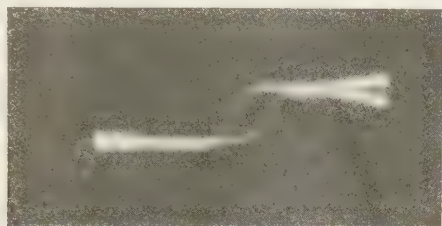


Fig. 1

tografie furono prese sulla stessa lastra, una col magnete eccitato e l'altra no. Risultano evidenti sulla fotografia sia lo spostamento verso destra della caratteristica nel campo, sia la maggiore inclinazione del tratto ascendente. Per rendere evidente la notevole influenza che ha quest'ultimo fenomeno sul funzionamento della lampada, si è fatta funzionare la lampada come oscillatore, rilevando, per mezzo del tubo di Braun e col dispositivo descritto in una nota precedente, il diagramma corrente oscillatoria-d. d. p. agli estremi della self del circuito oscillante. Questo diagramma è un'ellisse o - in par-

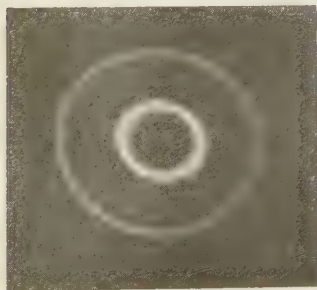


Fig. 2

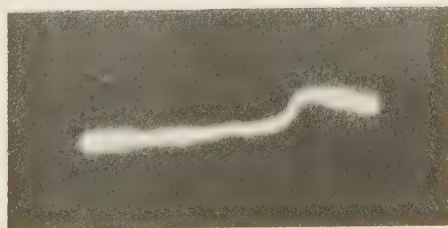


Fig. 3

ticolari condizioni - un cerchio il cui diametro è proporzionale alla ampiezza della corrente oscillante. Abbiamo fotografato sulla stessa lastra (fig. 2) il diagramma ottenuto con la lampada nel campo e quello ottenuto senza campo: si noti la rilevante amplificazione che un campo magnetico moderato produce sulle oscillazioni, e che può giungere - quando si è prossimi alle condizioni limite del regime oscillatorio - fino a rendere possibile l'inesco di oscillazioni che si estinguono sopprimendo il campo.

L'effetto di un campo magnetico alquanto più intenso di quelli sin qui considerati è mostrato dalla fig. 3, che rappresenta una caratteristica di placca presa nelle stesse condizioni della fig. 1, ma con un campo di circa 250 gauss. In essa si vede esaltato, per effetto del campo, il fenomeno dell'abbassamento della caratteristica in corrispondenza dei grandi valori del potenziale di griglia, fenomeno che si presenta — come è noto — nelle caratteristiche corrispondenti a basse tensioni di placca e che è già visibile nella fig. 1. Un campo poco più intenso di questo annulla completamente la corrente di placca, per qualsiasi valore del potenziale di griglia.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ presentata dal Socio VOLTERRA ⁽¹⁾.

1. — Limitando il concetto generale di operazione funzionale, introdotto dal Prof. Volterra per le funzioni di variabile reale, diremo che una operazione funzionale $F[y(t); \zeta]$, dipendente dalla natura di una funzione $y(t)$ analitica e da un parametro ζ , è *analitica* quando risulta una *funzione analitica* $f(\zeta)$ del parametro ζ una volta fissata la funzione $y(t)$, e quando inoltre si ottenga una *funzione* $f(\zeta; \alpha, \beta, \dots \lambda)$ *analitica anche rispetto ai parametri* $\alpha, \beta, \dots \lambda$ tutte le volte che la funzione variabile $y(t; \alpha, \beta, \dots \lambda)$ sia funzione analitica anche dei parametri $\alpha, \beta, \dots \lambda$. Scriveremo in questo caso

$$f(\zeta; \alpha, \beta, \dots \lambda) = F_t[y(t; \alpha, \beta, \dots \lambda); \zeta]$$

indicando F_t che la funzionale F va applicata considerando la y solo come funzione della variabile t , e pensando invece $\alpha, \beta, \dots \lambda$ come costanti. In altri termini, l'analiticità rapporto ai parametri $\alpha, \beta, \dots \lambda$ si conserva applicando la funzionale F . Analogamente si possono definire funzionali analitiche dipendenti dalla natura di più funzioni analitiche $y_1(t), y_2(t), \dots y_r(t)$ (anche di più variabili $y^*(t_1, t_2, \dots)$, ecc.) e da più parametri $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_s$.

Una classe molto importante di queste funzionali analitiche è costituita dalle « operazioni distributive », particolarmente studiate dal Prof. Pincherle ⁽²⁾; altri esempi si hanno nella teoria delle equazioni differenziali, dove la soluzione $g(x)$ dell'equazione $y(x, g, g', \dots g^{(n)}) = 0$ è una funzionale analitica $g(x) = F[y(x, g, g', \dots g^{(n)}); x, g_0, \dots g_0^{(n-1)}]$ dipendente dalla

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1925.

(2) Cfr., ad es.: PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive*. Bologna, Zanichelli, 1901.

natura della funzione analitica y e dai parametri x e $g_0, g'_0, \dots, g^{(u-1)}_0$ (valori iniziali); nella teoria delle equazioni integrali, ecc.

2. - Se è $y_0(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} y(t, \alpha) = y(t, \alpha_0)$ si avrà anche, per l'analiticità della $f(\zeta, \alpha) = F_t[y(t, \alpha); \zeta]$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(\zeta, \alpha) = f(\zeta, \alpha_0) = F_t[y_0(t); \zeta]$$

ad eccezione soltanto dei casi in cui α_0 è un punto singolare di $f(\zeta, \alpha)$ (se lo è per qualsiasi valore di ζ , la $y_0(t)$ si dirà un elemento di discontinuità della funzionale F). Potremo dire perciò che la nostra funzionale analitica è, in un certo senso, una *funzionale continua*. Per distinguere però questa continuità dalla continuità uniforme e da altri tipi di continuità ⁽¹⁾, che potrebbero essere diversi da questo, diremo che le funzionali analitiche hanno una *continuità analitica*.

3. - Restringendo ancora il nostro campo, diremo poi che una funzionale analitica $F[y(t); \zeta]$ è lineare omogenea, o semplicemente *lineare*, quando sia

$$(1) \quad F_t[ay_1(t) + by_2(t); \zeta] = aF_t[y_1(t); \zeta] + bF_t[y_2(t); \zeta]$$

essendo a e b costanti qualsiasi. Esempi di queste funzionali si hanno in quelle che in una precedente nota ⁽²⁾ ho chiamato *funzionali lineari di Volterra*

$$(2) \quad F_t[y(t); \zeta, a, b] = \int_a^b k(\zeta, t) y(t) dt$$

e nelle operazioni distributive di Pincherle

$$(3) \quad F_t[y(t); \zeta] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(\zeta)}{n!} y^{(n)}(\zeta)$$

già ricordate.

Per queste funzionali lineari si ha una notevole proprietà. A causa della (1), se poniamo

$$f(\zeta, \alpha) = F_t[y(t, \alpha); \zeta]$$

sarà

$$F_t\left[\frac{y(t, \alpha + b) - y(t, \alpha)}{b}; \zeta\right] = \frac{1}{b} F_t[y(t, \alpha + b); \zeta] - \frac{1}{b} F_t[y(t, \alpha); \zeta]$$

$$F_t\left[\frac{y(t, \alpha + b) - y(t, \alpha)}{b}; \zeta\right] = \frac{f(\zeta, \alpha + b) - f(\zeta, \alpha)}{b}$$

e, per la continuità analitica della nostra funzionale, si avrà, passando al

(1) Cfr. PAUL LÉVY. *Leçons d'analyse fonctionnelle*, chap. II, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

(2) L. FANTAPPIÈ. *Sulla riduzione delle operazioni distributive di Pincherle alle funzionali lineari di Volterra*. «Rend. Acc. Lincei», s. 6^a, vol. I, 1925, p. 70.

limite per b tendente a 0, almeno nei casi in cui tanto $y(t, \alpha)$ che $f(\chi, \alpha)$ siano regolari in un intorno di α ,

$$F_t \left[\frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha}; \chi \right] = \frac{\partial f(\chi, \alpha)}{\partial \alpha}$$

cioè

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} F_t[y(t, \alpha); \chi] = F_t \left[\frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha}; \chi \right]$$

Nelle nostre ipotesi dunque, per derivare rapporto a un parametro α , diverso dalla variabile t rispetto a cui opera la funzionale, potremo *derivare sotto il segno* F_t (di funzionale *lineare*).

Osserviamo infine che, a causa della (1) sarà, per qualsiasi funzionale lineare

$$(5) \quad F_t[0; \chi] = 0$$

4. - Per studiare più particolarmente le proprietà di una funzionale lineare $F_t[y(t); \chi]$, supponiamo che essa sia definita per $y(t) = \frac{1}{t - \alpha}$, almeno pei valori di α di un certo campo del piano complesso. Sia

$$v(\chi, \alpha) = F_t \left[\frac{1}{t - \alpha}; \chi \right]$$

il valore assunto dalla funzionale per $y(t) = \frac{1}{t - \alpha}$; questo valore sarà una funzione analitica di χ e α . Derivando successivamente rapporto ad α , si avrà, per la (4) del numero precedente,

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v(\chi, \alpha)}{\partial \alpha} &= F_t \left[\frac{1}{(t - \alpha)^2}; \chi \right] \\ \frac{\partial^n v(\chi, \alpha)}{\partial \alpha^n} &= n! F_t \left[\frac{1}{(t - \alpha)^{n+1}}; \chi \right] \end{aligned}$$

Sia ora $y(t)$ una funzione monodroma con un solo punto singolare per $t = \alpha_1$, e che si annulli per $t = \infty$; per essa varrà lo sviluppo di Laurent

$$(7) \quad y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(t - \alpha_1)^{n+1}}$$

ove

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 0.$$

Si può dimostrare che a questa serie (7) si può applicare termine a termine la nostra funzionale lineare F , per χ diverso da quei valori χ^* che

insieme ad α_i costituiscono coppie singolari per la funzione $v(\zeta, \alpha)$. Avremo allora

$$F_t[y(t); \zeta] = F_t\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(t - \alpha_i)^{n+1}}; \zeta\right] = \sum_{n=0}^{\infty} F_t\left[\frac{b_n}{(t - \alpha_i)^{n+1}}; \zeta\right]$$

e, per la (6),

$$(9) \quad F_t[y(t); \zeta] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \alpha_i^n} v(\zeta, \alpha)_{\alpha=\alpha_i}$$

serie convergente e regolare, a causa della (8), per qualsiasi valore di ζ , per cui la coppia ζ, α_i non sia singolare per la $v(\zeta, \alpha)$. I punti singolari ζ^* della $f(\zeta) = F_t[y(t); \zeta]$ possono dunque essere solo quelli per cui è singolare la $v(\zeta, \alpha_i)$; e questi saranno effettivamente singolari per la $f(\zeta)$ ad eccezione del caso che per la particolare scelta della $y(t)$ esistano dei valori ζ , singolari per la $v(\zeta, \alpha_i)$ e quindi anche per tutte le sue derivate, per cui, ciò non ostante, la $f(\zeta)$ sia regolare.

Questa funzione $v(\zeta, \alpha) = F_t\left[\frac{1}{t - \alpha}; \zeta\right]$ sarà perciò detta l'indicatrice dei punti singolari della funzionale lineare F ; e l'espressione (9) con essa costruita ci rappresenta così in generale la $f(\zeta)$ in tutto il suo campo d'esistenza.

5. - Se la funzione $y(t)$ monodroma avesse m punti singolari isolati $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, si avrebbe evidentemente, con ipotesi analoghe alle precedenti

$$y(t) = \sum_{r=1}^m y_r(t) = \sum_{r=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{rn}}{(t - \alpha_r)^{n+1}} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_{rn}|} = 0$$

$$(10) \quad f(\zeta) = F_t[y(t); \zeta] = \sum_{r=1}^m F_t[y_r(t); \zeta] = \sum_{r=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{rn}}{n!} \frac{\partial^n v(\zeta, \alpha_r)}{\partial \alpha_{\alpha_r}^n}$$

da cui si vede che i punti singolari della $f(\zeta)$ possono essere solo quelli delle funzioni

$$v(\zeta, \alpha_1), v(\zeta, \alpha_2), \dots, v(\zeta, \alpha_m)$$

e sono effettivamente questi, a meno che due singolarità di due funzioni diverse, p. es. una di $v(\zeta, \alpha_1)$ e una di $v(\zeta, \alpha_2)$, non si distruggano reciprocamente sovrapponendosi, e a meno che non si presenti la stessa eventualità già esaminata al numero precedente.

Si vede così che, tolti questi ultimi casi eccezionali, la posizione dei punti singolari ζ^* della $f(\zeta)$, ottenuta applicando la funzionale lineare F alla funzione $y(t)$, è determinata soltanto dalla posizione e non dalla natura dei punti singolari di $y(t)$.

6. — Trasformiamo ora, mediante l'integrale di Cauchy, l'espressione (10) che ci dà la nostra funzionale F sotto forma di serie. Ricordando che è

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} v(\zeta, \alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{v(\zeta, t)}{(t - \alpha)^{n+1}} dt$$

(dove C è una curva chiusa comprendente il punto $t = \alpha$ nel suo interno e nessun punto t^* singolare per la $v(\zeta, t)$) avremo dalla (10), indicando con C_r la curva chiusa comprendente il punto α_r nel suo interno

$$f(\zeta) = F_t[y(t); \zeta] = \sum_{r=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{rn}}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{v(\zeta, t)}{(t - \alpha_r)^{n+1}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^m \int_{C_r} v(\zeta, t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{rn}}{(t - \alpha_r)^{n+1}} dt$$

$$F_t[y(t); \zeta] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^m \int_{C_r} v(\zeta, t) y_r(t) dt$$

o anche, se le C_r si prendono in modo da non contenere ognuna che un solo punto α_r singolare per la $y(t)$,

$$F_t[y(t); \zeta] = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^m \int_{C_r} v(\zeta, t) y(t) dt$$

e infine, se indichiamo con C una curva chiusa complessiva che contenga nel suo interno tutti i punti singolari α_r di $y(t)$ ma non contenga alcun punto singolare t^* di $v(\zeta, t)$, si avrà finalmente per la funzionale lineare F l'altra espressione

$$(11) \quad F_t[y(t); \zeta] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\zeta, t) y(t) dt$$

Sotto questa forma, che mette in rilievo come la funzionale F dipenda da tutti i valori che la $y(t)$ prende sulla linea C , la funzionale stessa risulta definita anche per quelle funzioni monodrome $y(t)$ che abbiano *infiniti punti singolari discreti* o anche *linee singolari* o *lacune*, sempre però a condizione che si possa trovare una curva C , anche composta di più curve chiuse parziali, che racchiuda tutte queste singolarità di $y(t)$ ma nessuna singolarità t^* di $v(\zeta, t)$.

7. — Se indichiamo allora con I_y l'insieme (chiuso) dei punti singolari della $y(t)$, con $I_{v,t}$ l'insieme dei punti t^* singolari per la $v(\zeta, t)$ per qualsiasi ζ , con $I_{v,\zeta}$ quello dei punti ζ^* singolari per la $v(\zeta, t)$ per qualsiasi valore di t (punti singolari fissi della v), e infine con $I_{v,t}(\zeta)$ e $I_{v,\zeta}(t)$ gli insiemi analoghi dei punti singolari t^* e ζ^* rispettivamente, variabili però al variare di ζ e t nella $v(\zeta, t)$ possiamo precisare ancora più i campi di esistenza della funzionale $F[\zeta(t); \zeta]$, tanto per ciò che riguarda la funzione variabile $y(t)$, come il parametro ζ . Eccettuati infatti i soliti casi speciali già ricordati ai N. 4 e 5, potremo dire che, in generale, la funzionale $F_t[y(t); \zeta]$ non sarà definita per quelle funzioni monodrome $y(t)$ il cui insieme I_y dei punti singolari abbia punti comuni coll'insieme dei punti fissi $I_{v,t}$; mentre per quelle funzioni monodrome $y(t)$ per cui ciò non avviene la funzionale stessa è definita, e come funzione $f(\zeta) = F_t[y(t); \zeta]$ del parametro ζ cesserà a sua volta di esser definita (avrà cioè dei punti singolari) per quei valori ζ^* di ζ per cui l'insieme $I_{v,t}(\zeta^*)$ dei punti singolari t^* variabili viene ad avere elementi comuni coll'insieme I_y (cioè pei valori di ζ appartenenti agli insiemi $I_{v,x}(t^*)$ che si hanno dando a t^* tutti i valori singolari della $y(t)$, cioè facendo percorrere a t^* l'insieme I_y) e pei valori ai ζ dell'insieme $I_{v,\zeta}$ (punti singolari fissi).

8. — Supponiamo ora che l'indicatrice $v(\zeta, \alpha)$ dei punti singolari di una funzionale lineare F non abbia un punto singolare fisso per $\alpha = \infty$.

Sarà allora, per qualunque ζ , $v(\zeta, \infty) = 0$, poichè è $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \alpha} = 0$ e

quindi $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} v(\zeta, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_t\left[\frac{1}{t - \alpha}; \zeta\right] = F[0, \zeta] = 0$. In questa ipotesi,

posto $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$, potremo sviluppare $v(\zeta, \alpha)$ nell'intorno di $\alpha = \infty$ in serie

di potenze di $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ e avremo

$$(12) \quad v(\zeta, \alpha) = -\frac{\xi_0(\zeta)}{\alpha} - \frac{\xi_1(\zeta)}{\alpha^2} - \dots - \frac{\xi_n(\zeta)}{\alpha^{n+1}} - \dots$$

e per $\alpha' = 0$, sarà

$$F_t[-1; \zeta] = -\xi_0(\zeta) \quad \text{cioè} \quad \xi_0(\zeta) = F_t[1; \zeta]$$

$F_t[k; \zeta] = k \xi_0(\zeta)$. Se perciò la funzione $y(t)$ è regolare all' ∞ e ivi non si annulla (contrariamente a ciò che si è supposto ai nn. 4, 5, 6) ma prende il valore $k \neq 0$, per avere il valore della funzionale $F_t[y(t); \zeta]$ bisognerà aggiungere alle espressioni (10) e (11) la quantità $k \xi_0(\zeta)$. Si può dire anche che nella (11) l'integrale va esteso a una curva C comprendente nel suo interno anche il punto all' ∞ , che dunque si comporta in questo caso come un punto singolare per la $y(t)$.

Più generalmente, derivando la (12) rapporto ad $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$, avremo, per $\alpha = 0$.

$$(13) \quad \xi_n(\zeta) = F_t[t^n; \zeta]$$

Vediamo così che le $\xi_n(\zeta) = -\frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \alpha'^{n+1}} v\left(\zeta, \frac{1}{\alpha'}\right)_{\alpha'=0}$ non sono altro che i valori assunti dalla funzionale F , quando la funzione variabile $y(t)$ prende la forma delle potenze intere positive t^n di t . Queste funzioni $\xi_n(\zeta)$ sono indicate collo stesso simbolo nel Trattato sulle operazioni distributive dei Proff. Pincherle e Amaldi, già citato, e possono servire di base per la definizione delle operazioni distributive stesse.

9. - Osserviamo infine che non solo la funzionale lineare F individua perfettamente, quando esiste, la funzione indicatrice dei punti singolari $v(\zeta, \alpha) = F_t\left[\frac{1}{t-\alpha}; \zeta\right]$, che, se è regolare per $\alpha = \infty$, deve ivi annullarsi; ma anche, viceversa, presa una qualsiasi funzione $v(\zeta, \alpha)$ di due variabili, colla sola condizione che se è regolare per $\alpha = \infty$ deve ivi annullarsi per qualsiasi ζ , essa ci individua sempre, mediante la (10) del N. 5 (sotto forma di serie) o la (11) del N. 6 (sotto forma d'integrale) una funzionale lineare F_t di cui essa è l'indicatrice. Vediamo così come lo studio delle funzionali lineari analitiche, dipendenti da una funzione $y(t)$ di una sola variabile e da un parametro ζ , si riduca, per queste espressioni (10) o (11), allo studio delle funzioni di due variabili complesse loro indicatrici, e viceversa.

Di qui e dal numero precedente segue allora che oltre le operazioni distributive studiate dal Prof. Pincherle, che hanno per indicatrici funzioni $v(\zeta, \alpha)$ regolari per $\alpha = \infty$, esistono ancora altre funzionali lineari. Se consideriamo infatti una qualsiasi funzione $v(\zeta, \alpha)$, che abbia in $\alpha = \infty$ un punto singolare fisso, potremo definire in corrispondenza, mediante le solite espressioni (10) o (11), delle funzionali lineari per cui le $\xi_n(\zeta) = -\frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \alpha'^{n+1}} v\left(\zeta, \frac{1}{\alpha'}\right)_{\alpha'=0}$ non sono definite o hanno valori infiniti; queste funzionali lineari non saranno definite per quelle funzioni $y(t)$ che hanno l' ∞ per punto singolare, quindi, in particolare, pei polinomi, e costituiranno perciò una nuova classe di funzionali lineari, diversa certamente da quella delle operazioni distributive, rappresentate da serie del tipo (3) (N. 3), che sono invece certamente definite pei polinomi.

Matematica. — *La derivazione delle funzionali analitiche.*
Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Corrisp. F. SEVERI.

1. Secondo una definizione già data in una nota precedente, diremo che una quantità w è una *funzionale analitica*

$$F[y_1(t_1, t_2, \dots, t_{s_1}), y_2(t_1, \dots, t_{s_2}), \dots, y_r(t_1, \dots, t_{s_r}); \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n]$$

delle funzioni y_i quando dipende dalle funzioni analitiche y_i in modo che, date le funzioni y_i , la w risulta analitica nelle ζ_j e inoltre, se queste funzioni contengono analiticamente, oltre le variabili t_k , dei parametri α_k , la w risulta ancora una funzione analitica delle α_k . Considereremo, per semplicità, quelle funzionali F che dipendono da una sola funzione $y(t)$ di una variabile e da un parametro ζ o, al più, da due funzioni $y_1(t), y_2(t)$, potendosi immediatamente estendere al caso generale la maggior parte dei risultati. Giova qualche volta tener presente il nome della variabile apparente t , rispetto alla quale opera la funzionale (e da cui *non dipende* il valore della funzionale stessa), per distinguerla dai parametri. In tal caso si scriverà il simbolo F_t invece di F .

Per la definizione più generale di *funzionale* (o *funzione di linea*), analoga alla definizione di funzione del Dirichlet, rimando ai primi lavori del Prof. Volterra del 1887⁽¹⁾.

Il primo problema che si presenta per queste funzionali analitiche $F_t[y(t); \zeta]$ è quello di costruire uno strumento analitico conveniente (derivata) che possa servire a rappresentare la parte principale dell'incremento ΔF della funzionale, corrispondente a un incremento Δy della funzione variabile $y(t)$, ma indipendente dall'incremento Δy stesso. A questo problema, risolto dal Prof. Volterra per le funzionali dipendenti da funzioni *qualsiasi* di variabile reale mediante l'introduzione del concetto di *derivata funzionale in un punto*, non è però applicabile il metodo del Prof. Volterra stesso, dovendo, per le nostre ipotesi, essere $\Delta y(t)$ una funzione analitica di t .

(1) V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. «Rend. Acc. Lincei», 2° sem., 1887, fasc. 4, 6 e 7.

2. Consideriamo allora una qualsiasi funzionale analitica $F_t[y(t); \chi]$ e cerchiamo di calcolare l'incremento ΔF che essa subisce quando da una funzione $y_0(t)$ passiamo a un'altra funzione $y(t) = y_0(t) + \varepsilon \varphi(t)$, quando cioè diamo alla funzione variabile un incremento $\varepsilon \varphi(t)$ che è pure funzione analitica di t e che dipende inoltre linearmente da un parametro ε . Del resto anche se la $y(t) = y(t, \varepsilon)$, analitica in t ed ε , non fosse una funzione lineare di ε (pure essendo $y(t, 0) = y_0(t)$, $\left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \neq 0$) l'espressione $y_0(t) + \varepsilon \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$, che è lineare in ε e che rappresenta la $y(t, \varepsilon)$ a meno di infinitesimi di ordine superiore quando ε è infinitesimo, potrebbe essere sostituita alla $y(t, \varepsilon)$ nelle considerazioni seguenti.

Data l'analiticità della nostra funzionale, la quantità $F_t[y_0(t) + \varepsilon \varphi(t); \chi]$, una volta fissate le funzioni $y_0(t)$ e $\varphi(t)$, risulterà una *funzione analitica* di χ e del parametro ε . Sviluppando allora in serie di potenze di ε (supposto che $\varepsilon = 0$ non sia un punto singolare per un generico valore di χ) avremo

$$(1) \quad F_t[y_0(t) + \varepsilon \varphi(t); \chi] = F_t[y_0(t); \chi] + \\ + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_t[y_0(t) + \varepsilon \varphi(t); \chi] \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\varepsilon=0} + \dots$$

e quindi

$$\Delta F = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_t[y_0(t) + \varepsilon \varphi(t); \chi] \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\varepsilon=0} + \dots$$

La quantità

$$(2) \quad \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_t[y_0(t) + \varepsilon \varphi(t); \chi] \right)_{\varepsilon=0} = \delta F$$

che ci rappresenta il termine di prim'ordine di ΔF rispetto ad ε preso come infinitesimo principale, sarà perciò detta *variazione prima* della funzionale F . Questa quantità δF dipenderà analiticamente dalle due funzioni $y_0(t)$, $\varphi(t)$ e dai parametri ε e χ , sarà cioè una *funzionale analitica* di $y_0(t)$ e $\varphi(t)$. In particolare quando la funzionale F si riduce all'identità, $F_u[y(u); t] = y(t)$, δF diventa $\delta y = \varepsilon \varphi(t)$, variazione prima della variabile indipendente. Dimostriamo che δF è una *funzionale lineare* rispetto a δy . Basterà perciò dimostrare che

$$\frac{\delta F}{\varepsilon} = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_t[y_0(t) + \varepsilon \varphi(t); \chi] \right)_{\varepsilon=0} = \mathfrak{F}_t[y_0(t), \varphi(t); \chi]$$

è una funzionale analitica *lineare rapporto a* $\varphi(t)$. Posto $\varphi(t) = a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)$ (a e b costanti), avremo infatti da una parte, per (1)

$$(3) \quad F_t[y_0(t) + \varepsilon\varphi(t)] = F_t[y_0(t)] + \varepsilon\mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi(t)] + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right)_{\varepsilon=0} + \dots$$

(dove abbiamo, per brevità, tralasciato il parametro χ che non entra in considerazione) e d'altra parte, sviluppando secondo le potenze di $\eta_2 = \varepsilon b$

$$F_t[y_0(t) + \varepsilon\varphi(t)] = F_t[y_0(t) + \varepsilon a\varphi_1(t) + \eta_2\varphi_2(t)] = F_t[y_0(t) + \varepsilon a\varphi_1(t)] + \\ + \eta_2 \mathcal{F}_t[y_0(t) + \varepsilon a\varphi_1(t), \varphi_2(t)] + \frac{\eta_2^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta_2^2} \right)_{\eta_2=0} + \dots$$

e sviluppando ancora secondo le potenze di $\eta_1 = \varepsilon a$

$$F_t[y_0(t) + \eta_1\varphi_1(t) + \eta_2\varphi_2(t)] = F_t[y_0(t)] + \\ + \eta_1 \mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi_1(t)] + \frac{\eta_1^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta_1^2} \right)_{\eta_1=\eta_2=0} + \dots \\ + \eta_2 \mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi_2(t)] + \eta_2 \eta_1 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta_1} \right)_{\eta_1=0} + \dots$$

Sostituendo a η_1 e η_2 i loro valori εa e εb e ordinando secondo le potenze di ε , avremo infine

$$(4) \quad F_t[y_0(t) + \varepsilon\varphi(t)] = F_t[y_0(t) + \varepsilon a\varphi_1(t) + \varepsilon b\varphi_2(t)] = \\ = F_t[y_0(t)] + \varepsilon a \mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi_1(t)] + \varepsilon b \mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi_2(t)] + \varepsilon^2 m + \dots$$

e eguagliando i coefficienti di ε in (3) e (4)

$$\mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi(t)] = \mathcal{F}_t[y_0(t), a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)] = \\ = a\mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi_1(t)] + b\mathcal{F}_t[y_0(t), \varphi_2(t)]$$

con che è dimostrata la linearità della funzionale \mathcal{F} rapporto alla seconda funzione variabile $\varphi(t)$, e quindi *la linearità della variazione prima* δF *rapporto all'incremento* δy *della funzione variabile*.

3. Una volta fissata nella $\mathcal{F}_t[y(t), \varphi(t); \chi]$ la funzione $y(t)$, la \mathcal{F} resta una funzionale lineare di $\varphi(t)$ che potrà essere perfettamente determinata, per ciò che s'è visto nella precedente nota ⁽¹⁾, dalla sua *indicatrice dei punti*

(1) L. FANTAPPIÈ, *Le funzionali lineari analitiche e le loro singolarità*, in questo fascicolo, p. 502.

singolari $v(\zeta, \alpha)$. Per avere il valore della $\mathfrak{F}_t[y(t), \varphi(t); \zeta]$ una volta data la $v(\zeta, \alpha)$ e la funzione $\varphi(t)$ (monodroma) basterà infatti calcolare l'integrale

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\zeta, t) \varphi(t) dt = \mathfrak{F}_t[y(t), \varphi(t)]$$

essendo l'integrale esteso a una curva chiusa C comprendente nel suo interno tutti i punti singolari di $\varphi(t)$ ma nessun punto singolare di $v(\zeta, t)$ ⁽¹⁾.

Per brevità useremo per questo integrale la notazione

$$v(\zeta, t) \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(\zeta, t) \varphi(t) dt$$

e in generale la notazione

$$(6) \quad y_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \alpha) y_2(t_1, t_2, \dots, t_s, \alpha) = y(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, t_1, t_2, \dots, t_s) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C y_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \alpha) y_2(t_1, t_2, \dots, t_s, \alpha) d\alpha$$

essendo C una curva chiusa della sfera complessa α comprendente nel suo interno tutti i punti singolari α della y_2 (che porta la α con l'asterisco in alto) ma nessun punto singolare della y_1 . Sarà evidentemente

$$y_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \alpha) y_2(t_1, t_2, \dots, t_s, \alpha) = - y_1(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r, \alpha) y_2(t_1, t_2, \dots, t_s, \alpha)$$

poichè le due espressioni differiscono soltanto per il senso della curva C a cui è esteso l'integrale.

Quest'operazione (6) con cui si passa dalle due funzioni y_1 e y_2 (monodrome) alla funzione y sarà detta *prodotto o composizione funzionale* di y_1 e y_2 mediante la variabile α . Perchè quest'operazione di prodotto funzionale di due funzioni y sia definita *occorrerà evidentemente che $y_1(\alpha)$ e $y_2(\alpha)$ non abbiano punti singolari comuni.*

4. Tornando alla nostra funzionale $\mathfrak{F}_t[y(t), \varphi(t); \zeta]$, lineare rapporto a φ , osserviamo che la sua indicatrice $v(\zeta, \alpha)$ sarà una funzione di ζ e α

(1) Avvertiamo una volta per sempre che, conformemente a un'osservazione fatta nella nota citata, tra i punti singolari di una qualsiasi funzione $\varphi(t)$ deve essere contato, in tutte le nostre considerazioni, anche l' ∞ se, pur essendo regolare per la funzione, questa è ivi *diversa da 0*.

che dipenderà ancora, in generale, dalla funzione $y(t)$. Questa funzionale $F'_t[y(t), \alpha; \zeta]$, dipendente dalla natura della funzione $y(t)$ e dai parametri α e ζ , sarà detta la *derivata prima analitica della funzionale F rapporto alla funzione y nel punto α* , e sarà indicata anche con

$$D_{y(\alpha)} F_t[y(t); \zeta] = F'_t[y(t), \alpha; \zeta]$$

Ricordando (nota citata) che l'indicatrice $v(\zeta, \alpha)$ di una funzionale lineare $\mathfrak{F}_t[\varphi(t); \zeta]$ è il valore assunto dalla funzionale quando al posto della funzione variabile $\varphi(t)$ si mette $\frac{1}{t-\alpha}$, avremo allora

$$(7) D_{y(\alpha)} F_t[y(t); \zeta] = \mathfrak{F}_t\left[y(t), \frac{1}{t-\alpha}; \zeta\right] = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_t\left[y(t) + \frac{\varepsilon}{t-\alpha}; \zeta\right]\right)_{\varepsilon=0}$$

formula che ci definisce dunque la *derivata analitica di una funzionale F nel punto α* .

Dalla (5) del numero precedente avremo poi, per il significato della funzionale $\mathfrak{F}_t[y(t), \varphi(t); \zeta]$

$$\delta F = \varepsilon v(\zeta, \alpha) \varphi(\alpha) = v(\zeta, \alpha) \delta y(\alpha)$$

$$(8) \quad \delta F = \frac{1}{2\pi i} \int_C F'_t[y(t), \alpha; \zeta] \delta y(\alpha) d\alpha$$

essendo C la solita curva chiusa della (5).

Questa formula ci dà la *variazione prima della F, quando si conosca la derivata F' e la variazione δy della funzione variabile*, e ricorda in modo particolare la formula data dal Prof. Volterra per la variazione delle funzionali dipendenti da funzioni qualsiasi di variabile reale.

5. Facciamo ora la derivata di $F'_t[y(t), \alpha; \zeta]$ in un altro punto β , funzionale che indicheremo con $F''_t[y(t), \alpha, \beta; \zeta]$. Sarà, per le nostre definizioni (v. la (7) del numero precedente),

$$F''_t[y(t), \alpha, \beta; \zeta] = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} F'_t\left[y(t) + \frac{\eta}{t-\beta}, \alpha; \zeta\right]\right)_{\eta=0}$$

e sostituendo a F' la sua espressione

$$F''_t[y(t), \alpha, \beta; \zeta] = \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \varepsilon} F_t\left[y(t) + \frac{\varepsilon}{t-\alpha} + \frac{\eta}{t-\beta}; \zeta\right]\right)_{\varepsilon=\eta=0}$$

D'altra parte sarà

$$F''_t[y(t), \beta, \alpha; \zeta] = \left(\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \partial \eta} F_t\left[y(t) + \frac{\varepsilon}{t-\alpha} + \frac{\eta}{t-\beta}; \zeta\right]\right)_{\varepsilon=\eta=0}$$

e quindi, per il teorema d'inversione delle derivazioni ordinarie (essendo $\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \epsilon} = \frac{\partial^2}{\partial \epsilon \partial \eta}$)

$$F_t''[y(t), \alpha, \beta; \gamma] = F_t''[y(t), \beta, \alpha; \gamma]$$

o anche

$$(9) \quad D_{y(\beta)} D_{y(\alpha)} F_t[y(t); \gamma] = D_{y(\alpha)} D_{y(\beta)} F_t[y(t); \gamma]$$

cioè anche per le derivate delle funzionali analitiche vale il teorema sull'inversione delle derivazioni; le derivate seconde di una funzionale rapporto a una stessa funzione sono funzioni simmetriche dei due parametri α e β che indicano i punti in cui si fanno le due derivazioni.

6. Più generalmente, consideriamo una funzionale che dipenda da più funzioni analitiche, p. es. $F_t[y_1(t), y_2(t)]$. Per questa funzionale la derivata rapporto a y_1 in un punto α sarà data, per la (7), (pensando fissa la y_2) da

$$D_{y_1(\alpha)} F_t[y_1(t), y_2(t)] = \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} F_t \left[y_1(t) + \frac{\epsilon}{t - \alpha}, y_2(t) \right] \right)_{\epsilon=0}$$

e derivando ancora rapporto a y_2 in un punto β

$$D_{y_2(\beta)} D_{y_1(\alpha)} F_t[y_1(t), y_2(t)] = \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \epsilon} F_t \left[y_1(t) + \frac{\epsilon}{t - \alpha}, y_2(t) + \frac{\eta}{t - \beta} \right] \right)_{\epsilon=\eta=0}$$

Se invece si derivasse prima rapporto a y_2 nello stesso punto β , e poi rapporto a y_1 nel punto α , si otterrebbe

$$D_{y_1(\alpha)} D_{y_2(\beta)} F = \left(\frac{\partial^2}{\partial \epsilon \partial \eta} F_t \left[y_1(t) + \frac{\epsilon}{t - \alpha}, y_2(t) + \frac{\eta}{t - \beta} \right] \right)_{\epsilon=\eta=0}$$

e quindi, per il teorema d'inversione delle derivazioni ordinarie, avremo ancora

$$(10) \quad D_{y_2(\beta)} D_{y_1(\alpha)} F_t[y_1(t), y_2(t)] = D_{y_1(\alpha)} D_{y_2(\beta)} F_t[y_1(t), y_2(t)]$$

cioè il teorema sull'inversione delle derivazioni funzionali vale ancora se le due derivazioni, oltre che in punti diversi, si fanno anche rispetto a funzioni diverse. Il valore comune della derivata seconda data dalla (10) sarà indicato anche con la notazione più breve

$$F_t''[y_1(t), \alpha, y_2(t), \beta] = D_{y_2(\beta)} D_{y_1(\alpha)} F_t[y_1(t), y_2(t)]$$

ponendo i parametri α e β , che indicano i punti in cui si fanno le derivazioni, subito dopo le rispettive funzioni rispetto a cui si deriva.

Osserviamo però che questa derivata seconda $F_t''[y_1(t), \alpha, y_2(t), \beta]$ non sarà in generale, a differenza di ciò che accadeva per il caso del numero precedente, una funzione simmetrica di α e β .

Matematica. — *Sur les surfaces principales des congruences rectilignes de M. Bianchi*⁽¹⁾. Nota di S. FINIKOFF, presentata dal Socio L. BIANCHI⁽²⁾.

Rapportons la congruence à ses surfaces développables et prenons pour surface initiale la surface des centres des rayons de la congruence pour pouvoir appliquer les formules de M. Guichard (Voir Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, I, p. 316-323).

L'élément linéaire de la représentation sphérique de la congruence étant

$$ds^2 = E du^2 + 2 \cos \Omega \sqrt{EG} du dv + G dv^2,$$

et la distance focale 2ρ , on aura pour la seconde forme fondamentale de Kummer :

$$e = -\rho E, \quad f = \rho \cos \Omega \sqrt{EG}, \quad f' = -\rho \cos \Omega \sqrt{EG}, \quad g = \rho G,$$

d'où pour l'équation différentielle des surfaces principales de la congruence⁽³⁾:

$$(a) \quad E du^2 + 2 \frac{\sqrt{EG}}{\cos \Omega} du dv + G dv^2 = 0.$$

Supposons qu'elles interceptent sur la première nappe de la surface focale un réseau conjugué. Pour que deux directions soient conjuguées sur la première nappe de la surface focale il faut que l'on ait

$$\sqrt{E} \sin \Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \rho \right] du \delta u - \rho \sqrt{G} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \left\{ \begin{matrix} \sqrt{G} & 12 \\ E & 2 \end{matrix} \right\} \sin \Omega \right] dv \delta v = 0.$$

En posant ici, à cause de (a)

$$\frac{du}{dv} \frac{\delta u}{\delta v} = \frac{G}{E},$$

(1) L'Autore dà questo nome alle congruenze rettilinee W le cui falde focali hanno in punti corrispondenti egual curvatura (L. B.).

(2) Presentata nella seduta del 4 aprile 1925.

(3) Supposta non normale: $\Omega \neq \frac{F}{2}$ (L. B.).

il vient

$$(1) \quad \left| \frac{1}{E} \sin \Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \frac{12}{2} \right\} \rho \right] - \rho \left[\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \left| \frac{1}{E} \left\{ \frac{12}{2} \right\} \sin \Omega \right] \right| = 0.$$

La courbure totale de la première nappe étant

$$K_1 = - \frac{\left| \frac{1}{E} \sin \Omega \left[\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \left| \frac{1}{E} \left\{ \frac{12}{2} \right\} \sin \Omega \right] \right|}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial u} + \left\{ \frac{12}{2} \right\} \rho \right|},$$

la condition (1) équivaut à la suivante

$$K_1 = \frac{\sin^2 \Omega}{\rho^2}.$$

Comme d'autre part la distance des points limités de la congruence est $\frac{2\rho}{\sin \Omega}$, nous sommes parvenus au théorème suivant:

Si les surfaces principales de la congruence découpent sur une nappe de la surface focale un réseau conjugué, la courbure totale de cette nappe est égale, au signe près, à la valeur inverse du carré de la distance des points limites.

Le théorème inverse subsiste évidemment.

De là suit immédiatement le théorème que j'ai donné en 1917 dans ma thèse ⁽¹⁾:

Les surfaces principales des congruences de M. Bianchi découpent sur les deux nappes de la surface focale des réseaux conjugués, et cette propriété est caractéristique pour les congruences en question.

Sur les deux nappes de la surface focale se correspondent ainsi deux paires de réseaux conjugués — les réseaux découpés par les surfaces développables et ceux découpés par les surfaces principales de la congruence ⁽²⁾. Mais alors, d'après un beau théorème de M. Peterson, les lignes asymptotiques se correspondent aussi et la congruence est de la classe de M. Bianchi, puisque les deux nappes de la surface focale ont la même courbure totale.

La détermination des congruences de cette espèce, dépend, outre que de l'équation de M. Guichard, de deux équations (1) qui prennent la forme

$$(2) \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial u} = \sqrt{\frac{E}{G} \frac{\partial \Omega}{\sin \Omega}} \quad , \quad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = \sqrt{\frac{G}{E} \frac{\partial \Omega}{\sin \Omega}}.$$

(1) *Problème général de la déformation avec conservation d'un système conjugué*. Moscou, 1917 (en russe).

(2) Supposta non normale (L. B.).

Matematica. — *Sulla rappresentazione analitica in forma finita delle funzioni i cui diagrammi consistono di una successione di archi di linee diverse varianti con legge assegnata da un intervallo all'altro.* Nota dell'ing. LETTERIO LABOCCETTA presentata dal Socio Col. G. A. CROCCO.

In una mia precedente Nota ⁽¹⁾ ho mostrato come sia possibile costruire delle espressioni che sono la rappresentazione analitica, in forma finita, di grandezze le quali, in diversi intervalli del campo percorribile dalla variabile da cui dipendono, sono espresse da funzioni diverse della variabile stessa.

In una seconda Nota ⁽²⁾ ho mostrato come ad una rappresentazione analitica in forma finita si possa giungere, anche nel caso in cui il numero degli intervalli da considerare diventi infinito, per quelle funzioni i cui diagrammi sono costituiti da uno o più archi di curve di natura qualsiasi periodicamente ripetute, estendendo poi ⁽³⁾ il metodo indicato anche al caso delle funzioni doppiamente o triplamente periodiche.

Ma non è con ciò esaurito il campo di queste ricerche, perchè resta ancora una classe, ed anzi assai importante, di funzioni dello stesso tipo le quali non possono essere trattate col metodo delle funzioni non periodiche perchè il numero degli intervalli da considerare è infinito, nè possono esser trattate col metodo delle funzioni periodiche perchè il diagramma non si ripete identicamente nei successivi intervalli, la funzione che ad esso corrisponde variando, in modo discontinuo, da un intervallo all'altro con legge assegnata.

1°) Dire che una funzione y di x dipendente da m parametri

$$(1) \quad y = f(a_1, a_2, \dots, a_m, x)$$

varia discontinuamente, con legge assegnata, ogni qualvolta la variabile x passa dall'uno all'altro degli infiniti intervalli nei quali si immagina diviso il suo campo di variabilità, da $-\infty$ a $+\infty$, significa che in corrispon-

(1) «R. C.», vol. XXXI, fasc. 12°, seduta 18 giugno 1922.

(2) «R. C.», vol. XXXII, fasc. 8°, seduta 22 aprile 1923.

(3) «R. C.», vol. XXXII, fasc. 12°, seduta 17 giugno 1923.

denza al numero di ordine n dell'intervallo percorso dalla variabile, si sa assegnare il gruppo degli m valori

$$(2) \quad a_1 = \varphi_1(n), \quad a_2 = \varphi_2(n) \cdots \cdots a_m = \varphi_m(n)$$

che gli m parametri debbono avere in quell'intervallo.

In altri termini i parametri dovranno essere delle funzioni del numero di ordine dell'intervallo e la (1) dovrà perciò potersi porre sotto la forma

$$(3) \quad y = f\{\varphi_1(n), \varphi_2(n) \cdots \cdots \varphi_m(n), x\}$$

intendendo però che n debba essere esprimibile a mezzo di x .

Una tale esprimibilità si presenta più o meno facile a seconda che il valore dei successivi intervalli si mantiene costante oppure varia, secondo una legge assegnata.

Quando gli intervalli sono tutti uguali ed hanno il valore costante c , il numero d'ordine n dell'intervallo nel quale cade il punto che ha per ascissa x si determina facilmente, ma bisogna prima convenire in qual modo si intende procedere alla numerazione degli intervalli stessi, e cioè sarà

$$(4) \quad n = I \frac{x}{c} \quad \text{oppure} \quad n = I + I \frac{x}{c}$$

se la numerazione deve procedere da $-\infty$ a $+\infty$ con l'intervallo di ordine zero a destra, oppure a sinistra, dell'origine.

Bisognerà porre invece

$$(5) \quad n = I \frac{|x|}{c} \quad \text{oppure} \quad n = I + I \frac{|x|}{c}$$

se il numero d'ordine deve variare da 0 a $+\infty$ oppure da $+1$ a $+\infty$ tanto a destra, quanto a sinistra dell'origine cominciando dall'uno e dall'altro lato con zero o con uno.

Infine se, mantenendo quest'ultima disposizione dei valori si vuole che abbiano il segno $-$ gli intervalli a sinistra ed il segno $+$ gli intervalli a destra dell'origine, bisognerà scrivere

$$(6) \quad n = \left(I \frac{|x|}{c} \right) \operatorname{sgn} x \quad \text{oppure} \quad n = \left(I + I \frac{|x|}{c} \right) \operatorname{sgn} x.$$

La scelta da fare dipende dalla natura della questione ma, qualunque essa sia, restano sempre immutati i procedimenti che saranno qui appresso esposti.

Supposto dunque di avere scelto il metodo di numerazione corrispondente alla prima delle (4), con questa sostituzione la (3) diventa

$$(7) \quad y = f \left\{ \varphi_1 \left(I \frac{x}{c} \right), \dots \varphi_m \left(I \frac{x}{c} \right), x \right\}.$$

Due casi notevoli di questa espressione si hanno secondo che si vogliano nei successivi intervalli avere archi corrispondenti facendo variare x periodicamente da zero a c ed allora bisogna scrivere

$$(8) \quad y = f \left\{ \varphi_1 \left(I \frac{x}{c} \right), \dots \varphi_m \left(I \frac{x}{c} \right), c F r \frac{x}{c} \right\}$$

oppure si vuole che y conservi un valore costante in ciascuno degli intervalli, ed allora bisogna scrivere

$$(9) \quad y = f \left\{ \varphi_1 \left(I \frac{x}{c} \right), \dots \varphi_m \left(I \frac{x}{c} \right), c I \frac{x}{c} \right\}.$$

2°) Occorre vedere in quali circostanze si presentino le funzioni poligonali dei tipi innanzi menzionati.

Le funzioni del tipo (7) si presentano principalmente nello studio delle funzioni periodiche con smorzamento discontinuo. Ed infatti se si prende una funzione periodica, il cui periodo sia c , con m parametri *costanti* e perciò del tipo della (1) e si applica ad essa come fattore di smorzamento *discontinuo* una funzione del tipo delle (9) si ha come espressione generale di una funzione periodica smorzata discontinuamente

$$(10) \quad y = f(a_1, a_2, \dots a_m x) F \left\{ \varphi_1 \left(I \frac{x}{c} \right), \dots \varphi_m \left(I \frac{x}{c} \right) c I \frac{x}{c} \right\}.$$

Le funzioni del tipo (8) si presentano nel caso della rappresentazione delle poligonali a lati rettilinei le ordinate dei cui vertici variano con legge assegnata. Ciò equivale a dire che la poligonale deve essere inscritta in una curva data. Perciò se è $y = f(x)$ questa curva, l'equazione della poligonale sarà

$$(11) \quad y = f \left(c I \frac{x}{c} \right) + \left[\frac{f \left\{ c \left(I + I \frac{x}{c} \right) \right\} - f \left(c I \frac{x}{c} \right)}{c} \right] c F r \frac{x}{c}.$$

Le funzioni infine del tipo (9) si presentano nello studio delle serie; perchè, infatti, essendo una serie una successione ordinata di termini i cui valori e segni risultano determinati in funzione di parametri costanti e del

numero di ordine del termine, preso come variabile indipendente, è chiaro che basta fare $c = 1$ nella (9) per avere la forma generale

$$(12) \quad y = f\{\varphi_1 I x, \varphi_2 I x, \dots \varphi_n I x, I x\}$$

della funzione finita il cui diagramma scalariforme, rappresentante la serie, è costituito da segmenti rettilinei paralleli all'asse delle x e che, nei diversi intervalli, hanno per ordinate i valori dei termini che nella successione hanno lo stesso numero di ordine.

È da notare infine che, essendo la (12) una funzione il cui diagramma è scalariforme, ne segue che, quando la si integri determinando le costanti con la condizione che il valore dell'integrale nell'estremo destro di un intervallo coincida col valore dell'integrale nell'estremo sinistro dell'intervallo successivo, il suo integrale è una funzione che ha per diagramma una poligonale continua a lati rettilinei del tipo della (11). Si scorge perciò che se la serie è convergente la detta poligonale avrà un assintoto, parallelo all'asse delle x , la cui ordinata sarà il valore della serie, nel mentre l'ordinata del vertice corrispondente all'estremo destro del lato n^{mo} darà la *somma dei primi n termini* e la differenza fra l'ordinata dell'assintoto e l'ordinata del detto vertice darà il *resto*, costituito dalla somma di tutti i termini che seguono l' n^{mo} (1).

3°) Passando ora al caso in cui il valore c_n dell'intervallo varia, secondo una legge assegnata al variare del numero di ordine dell'intervallo, è da osservare che i simboli $I \frac{x}{c_n}$, $Fr \frac{x}{c_n}$ divengono privi di significato, perchè essi erano stati definiti nella ipotesi dell'intervallo c costante. Le espressioni, in funzione dell'ascissa x , del numero di ordine dell'intervallo e della frazione dell'intervallo stesso che trovasi a sinistra del punto che cade in esso ed ha l'ordinata x diverrebbero complicatissime e poco maneggevoli.

Si ovvia a tale difficoltà e si giunge a delle espressioni semplici, che sono formalmente identiche a quelle già ottenute nel caso dell'intervallo costante, introducendo, come generalizzazione della funzione

$$(13) \quad Fr \frac{x}{c} = \frac{x - c I \frac{x}{c}}{c}$$

una nuova funzione $\Phi_p \left(\frac{x}{c_n} \right)$ definita all'analogha relazione

$$(14) \quad \Phi_p \left(\frac{x}{c_n} \right) = \frac{x - S_{n-1}(c_i)}{c_n}$$

(1) Questo argomento, del quale lo spazio non consente qui di dare un cenno meno fugace, mi propongo di svolgerlo con la dovuta ampiezza in un lavoro ad esso dedicato.

nella quale $S_{n-1}(c_i)$ indica la somma degli $n-1$ intervalli che precedono quello in cui cade il punto di ascissa x , ossia l'ascissa dell'estremo sinistro dell' n^{mo} intervallo c_n e $\Phi_p\left(\frac{x}{c_n}\right)$ è quindi, al pari di $Fr\frac{x}{c}$, una funzione che varia linearmente da 0 ad 1 nel mentre x passa dal valore S_{n-1} a quello S_n percorrendo tutto l'intervallo n^{mo} da un estremo all'altro.

Naturalmente per poter effettivamente adoperare questa nuova funzione bisogna saper esprimere a mezzo di x tanto n quanto c_n e $S_{n-1}(c_i)$ (1).

Avute queste espressioni si procede, nel caso dell'intervallo variabile, in modo perfettamente analogo a quello seguito nel caso dell'intervallo costante ponendo però $\Phi_p\left(\frac{x}{c_n}\right)$ in luogo di $Fr\frac{x}{c}$, $S_{n-1}(c_i)$ in luogo di $cI\frac{x}{c}$ e n_x in luogo di $I\frac{x}{c}$, con il simbolo n_x intendendosi di indicare il numero di ordine n dell'intervallo espresso in funzione di x .

Con queste sostituzioni le tre relazioni fondamentali (7), (8), (9) diventano

$$(15) \quad y = f\left\{\varphi_1(n_x), \dots \varphi_m(n_x), x\right\}$$

$$(16) \quad y = f\left\{\varphi_1(n_x), \dots \varphi_m(n_x), c_n \Phi_p\left(\frac{x}{c_n}\right)\right\}$$

$$(17) \quad y = f\left\{\varphi_1(n_x), \dots \varphi_m(n_x), S_{n-1}(c_i)\right\}$$

e da queste formole fondamentali si ricavano poi, come innanzi, quelle relative ai diversi particolari.

4°) Quanto si è detto innanzi delle funzioni poligonali con un solo indice variabile si estende agevolmente al caso delle funzioni poliedrali a due indici, come quelle, ad esempio, che rappresentano le serie doppie.

Se c_1 e c_2 sono gli intervalli, costanti corrispondenti ai due indici, le relazioni fondamentali (7), (8), (9) diventano

$$(18) \quad z = f\left\{\varphi_1\left(I\frac{x}{c_1}, I\frac{y}{c_2}\right), \dots \varphi_m\left(I\frac{x}{c_1}, I\frac{y}{c_2}\right), x, y\right\}$$

(1) Esempi, in alcuni casi particolari, dell'effettivo calcolo di queste grandezze in dipendenza della legge data di variabilità dell'intervallo, si possono vedere al cap. V « Smorzamento » del mio scritto *Un metodo per la rappresentazione analitica sotto forma finita delle funzioni periodiche poligonali comunque irregolari*. « L'Elettrotecnica », 5, 15 e 25 luglio 1924.

$$(19) \quad \bar{z} = f \left\{ \varphi_1 \left(I \frac{x}{c_1}, I \frac{y}{c_2} \right), \dots \varphi_m \left(I \frac{x}{c_1}, I \frac{y}{c_2} \right), \right. \\ \left. c_1 Fr \frac{x}{c_1}, c_2 Fr \frac{y}{c_2} \right\}$$

$$(20) \quad \bar{z} = f \left\{ \varphi_1 \left(I \frac{x}{c_1}, I \frac{y}{c_2} \right), \dots \varphi_m \left(I \frac{x}{c_1}, I \frac{y}{c_2} \right), \right. \\ \left. c_1 I \frac{x}{c_1}, c_2 I \frac{y}{c_2} \right\}.$$

Da queste relazioni si passa a quelle che valgono per il caso degli intervalli variabili osservando le stesse norme seguite per la formazione delle (15), (16), (17).

Meccanica. — *Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal.* Nota del Dott. D. J. STRUIK, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾.

1. Dans une communication précédente⁽²⁾ j'ai esquissé la mise en équation du problème des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal et donné le critère pour en aborder la solution. J'ai montré aussi que la première approximation est identique à la solution du problème connue depuis Airy. Ici je développerai un algorithme convergent permettant de construire des approximations successives et les résultats numériques du calcul jusqu'au troisième ordre inclu. On parvient de la sorte à la même équation pour la surface libre que Stokes avait déjà trouvée. Cette équation et l'expression de la vitesse peuvent servir pour pénétrer plus intimement dans la signification physique de la solution.

2. *La forme des fonctions ω_n .* On peut essayer de résoudre les équations (F) et (F₁) de notre communication précédente en posant:

$$(1) \quad \omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \mu^n$$

et

$$(2) \quad k = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \mu^n,$$

(1) Presentata nella seduta del 4 aprile 1925.

(2) D. J. STRUIK, *Sur les ondes irrotationnelles dans les canaux.* « Rend. Acc. Linc. »

(6) 1, I (1925), pp. 373-377.

où μ est un paramètre indéterminé. Nous avons vu qu'on trouve pour ω , et k_0 :

$$(3) \quad \omega_1 = -i(\zeta + \zeta^{-1}) = -i\eta_1$$

et

$$(4) \quad k_0 = \text{Coth } \alpha,$$

où nous avons posé (ce qu'on peut faire sans restreindre la généralité de la solution) $\gamma_1 = 1$ dans l'équation (21) de notre communication précédente.

La fonction $\omega(\zeta)$ doit être holomorphe uniforme dans la couronne comprise entre les deux circonférences de rayon $R (> 1)$ et $\frac{1}{R}$. Elle y sera par conséquent développable en série de Laurent. Si l'on introduit les combinaisons

$$(5) \quad \eta_v = \zeta^v + \zeta^{-v}, \quad \delta_v = \zeta^v - \zeta^{-v},$$

on peut naturellement regarder ω aussi comme série dont le terme général est de la forme

$$ic_v \eta_v + c'_v \delta_v,$$

les c et les c' étant des constantes qui dépendent du paramètre η .

La condition que $\omega(\zeta)$ soit purement imaginaire sur la circonférence $|\zeta| = 1$ entraîne immédiatement que les coefficients c_v et c'_v soient réels. Par des considérations analogues à celles développées par M. Levi-Civita ⁽¹⁾, on peut montrer qu'il est loisible (par un simple changement du paramètre μ , suivant les puissances duquel on suppose développées les inconnues ω et k) de supposer que les fonctions ω_n ($n > 1$) n'ont pas de terme en η_1 .

Nous allons démontrer que les η_n , $n > 1$, sont des polynomes (par rapport à ζ et ζ^{-1}) de la forme suivante:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 = -i \gamma_2 \eta_2 \\ \omega_3 = -i \gamma_3 \eta_3 \\ \omega_4 = -i (\gamma_{44} \eta_4 + \gamma_{42} \eta_2) \\ \omega_5 = -i (\gamma_{55} \eta_5 + \gamma_{53} \eta_3) \\ \dots\dots\dots \\ \omega_n = -i (\gamma_{nn} \eta_n + \gamma_{n,n-2} \eta_{n-2} + \dots + \gamma_{nd} \eta_d), \end{array} \right.$$

où $d = 2$ pour n pair, $d = 3$ impair, et les γ sont des constantes réelles.

(1) T. LEVI-CIVITA, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie* « Mathem. Annalen », 93 (1925) pp. 264-314, spéc. p. 291.

3. *L'algorithme de l'intégration.* Écrivons l'équation (F) de la manière suivante :

$$(7) \quad \frac{d\tau}{d\sigma} - k_0 \vartheta = k P(\vartheta, \tau) - (k - k_0) \vartheta, \quad \text{sur la circonférence } |\zeta| = R,$$

où

$$(8) \quad P(\vartheta, \tau) = e^{-i\tau} \sin \vartheta - \vartheta = -3 \vartheta \tau - \dots$$

Posons

$$(9) \quad \omega_n = \vartheta_n + i\tau_n \quad (\vartheta_n, \tau_n \text{ réelles}).$$

Alors d'après (1) :

$$(10) \quad \vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n \mu^n, \quad \tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \mu^n.$$

Posons ensuite, d'après (1), (2), et (10)

$$(11) \quad k P(\vartheta, \tau) = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n \mu^n,$$

où l'on voit immédiatement que la somme commence par le terme en μ^2 .

Supposons maintenant qu'on ait trouvé effectivement $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{n-1}$ sous la forme (6) et les constantes k_1, k_2, \dots, k_{n-2} en constatant que k_1, k_3, \dots (tous les k_v d'indice impair non supérieur à $n-2$) sont nulles. Alors ω_n a la forme

$$(12) \quad \omega_n = q'_{nn} \sin n\sigma + q'_{n, n-2} \sin(n-2)\sigma + \dots + q'_{ne} \sin e\sigma,$$

où $e = 2$ pour n pair, $e = 1$ pour n impair et les q'_{nk} sont des constantes dépendantes des $k_v, v = 1, 2, \dots, n-2$ et des coefficients de $\omega_v, v = 1, 2, \dots, n-1$, et doivent désormais être censées connues. On tire ensuite de (7), en égalant les coefficients de μ^n dans les deux membres :

$$(13) \quad \frac{d\tau_n}{d\sigma} - k_0 \vartheta_n = \chi_n - k_{n-1} \vartheta_1 \quad \text{sur la circonférence } |\zeta| = R,$$

où

$$(14) \quad \chi_n = \omega_n + \sum_{v=2}^{n-2} k_v \vartheta_{n-v}.$$

La fonction χ_n est de la même forme que ω_n :

$$(15) \quad \chi_n = q_{nn} \sin n\sigma + q_{n, n-2} \sin(n-2)\sigma + \dots + q_{ne} \sin e\sigma.$$

Posons, avec Stokes :

$$(16) \quad S_n = R^n + R^{-n}, \quad D_n = R^n - R^{-n}.$$

En tenant compte de ce que ω_n est une série de la forme

$$\sum_{v=2}^{\infty} (-i \gamma_{n,v} \eta_v + \gamma'_{n,v} \delta_v),$$

où les γ sont des coefficients réels, on tire aisément de (13) et de (15), que les $\gamma_{n,v}$ pour $v > n$, ainsi que tous les $\gamma'_{n,v}$ sont nuls; que

$$(17) \quad \begin{cases} 0 = q_{n,1} - D_1 k_{n-1} & \text{pour } n \text{ impair,} \\ 0 = k_{n-1} & \text{pour } n \text{ pair;} \end{cases}$$

et enfin que:

$$(18) \quad \omega_n = -i \sum_{j=d}^n \frac{q_{n,j}}{-j S_j + k_0 D_j} \eta_j.$$

Par ces équations notre algorithme récurrent est parfaitement justifié; il résulte d'ailleurs applicable indéfiniment à partir de $n = 2$, pendant que (3) et (4) fournissent une expression pour ω_1 et k_0 .

On voit en particulier que ω_n ne contient pas des termes en δ_n . Cela se traduit dans la circonstance que les ondes sont nécessairement douées de symétrie (géométrique et mécanique) par rapport à la verticale d'une crête.

4. *Le calcul effectif.* On trouve pour les trois premières approximations:

$$(19) \quad \begin{cases} \omega_1 = -i \eta_1 \\ \omega_2 = -\frac{3}{2} i \frac{S_2 + 2}{S_2 - 2} \eta_3 \\ \omega_3 = -\frac{1}{12} i \frac{25 S_4 + 53 S_2 + 60}{D_1^4} \eta_3 \end{cases}$$

et pour la constante m , introduite dans la note citée sous (1) et déterminée par l'équation (12) de cette note:

$$(20) \quad e^{-im} = 1 + \mu^2.$$

Cela donne pour l'affixe des particules z :

$$(21) \quad \begin{aligned} z = \frac{f}{c} + \frac{\lambda}{\pi} \sin \frac{2\pi f}{c\lambda} \mu + 2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{S_2 + 1}{D_1^2} \sin \frac{4\pi f}{c\lambda} \mu^2 + \\ + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{3\pi} \frac{3 S_4 + 4 S_2 + 4}{D_1^2} \sin \frac{6\pi f}{c\lambda} \mu^3 + \frac{\lambda}{\pi} \frac{S_2 + 4}{S_2 - 2} \sin \frac{2\pi f}{c\lambda} \mu^3. \end{aligned}$$

(1) G. G. STOKES, *Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves*. « Math. & Physical Papers », Cambridge, Un. Press, I (1880), pp. 314-326, spéc. p. 324.

Par l'introduction d'un nouveau paramètre b dans (23), savoir

$$(22) \quad -\frac{2\pi}{\lambda}b = \mu - \frac{S_2 + 4}{S_2 - 2}\mu^3,$$

on obtient pour la surface libre les équations paramétriques:

$$(23) \quad \begin{cases} x = \frac{\varphi}{c} - b S_1 \sin \frac{2\pi\varphi}{c\lambda} + b^2 \frac{2\pi}{\lambda} S_2 \frac{S_2 + 1}{D_1^2} \sin \frac{4\pi\varphi}{c\lambda} - \\ \quad - b^3 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 S_3 \frac{3S_4 + 4S_2 + 4}{2D_1^4} \sin \frac{6\pi\varphi}{c\lambda}, \\ y = \frac{q}{c} - b D_1 \cos \frac{2\pi\varphi}{c\lambda} + b^2 \frac{2\pi}{\lambda} D_2 \frac{S_2 + 1}{D_1^2} \cos \frac{4\pi\varphi}{c\lambda} - \\ \quad - b^3 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 D_3 \frac{3S_4 + 4S_2 + 4}{2D_1^4} \cos \frac{6\pi\varphi}{c\lambda}, \end{cases}$$

qui coïncident (à un changement des axes près) avec celles trouvées par Stokes.

Pour la constante $p = ke^{-im}$ on obtient

$$(24) \quad p = \frac{S_1}{D_1} + \frac{S_5 + 12S_3 + 5S_1}{2D_1^3}\mu^2,$$

et pour la vitesse complexe $w = u - iv$:

$$(25) \quad w = ce^{-im}e^{-i\omega} = c \left[1 - 2 \cos \frac{2\pi f}{c\lambda} \mu - 2 \frac{S_2 + 4}{D_1^2} \cos \frac{4\pi f}{c\lambda} \mu^2 - \right. \\ \left. - 3 \frac{S_4 + 4S_2 + 8}{D_1^4} \cos \frac{6\pi f}{c\lambda} \mu^3 + 2\mu^2 + 2 \frac{S_2 + 4}{D_1^2} \cos \frac{2\pi f}{c\lambda} \mu^3 \right].$$

En y remplaçant f par son expression en χ déduite de (21) (jusqu'aux termes en μ^2 inclus), on obtient le vecteur vitesse w en fonction de l'affixe χ sous la forme explicite suivante

$$(26) \quad w = c \left[1 - 2 \cos \frac{2\pi\chi}{\lambda} \mu - \frac{12}{D_1^2} \cos \frac{4\pi\chi}{\lambda} \mu^2 \right].$$

On tire de ces expressions l'expression déjà calculée par Stokes ⁽¹⁾, qui nous rend compte du transport de masse, effet de second ordre en μ^2 , dont

(1) G. G. STOKES, *On the theory of oscillatory waves*. « Trans. Cambridge Philos. Soc. », 8 (1847) p. 441 = « Mathem. and Phys. Papers », I (1880) pp. 197-269, spéc. p. 205 et 207.

M. Levi-Civita, en s'inspirant d'une remarque de Rayleigh, a pu plus tard préciser l'existence et la valeur par des considérations d'ordre général, qui s'appliquent à toute espèce d'ondes permanentes, même non périodiques. M. Crudeli ⁽¹⁾, qui a obtenu de l'équation fondamentale, donnée par M. Levi-Civita, d'une manière un peu différente, des équations analogues à celles de ce paragraphe, mais jusqu'au second ordre inclu, a discuté amplement ces équations, en déduisant d'elles des expressions pour la profondeur moyenne, etc.

5. *La convergence des séries.* On démontre la convergence des séries obtenues pour ω et k en se servant des majorantes des équations employées pour les approximations successives. Pour ce but il convient d'avoir recours à une sorte de majorantes analogues à celles employées par M. Levi-Civita, dans le mémoire cité. Dans un travail plus étendu nous nous proposons de détailler aussi ce point essentiel.

Fisica matematica. — *Capacità del condensatore elettrico a piatti circolari infinitamente sottile.* Nota di R. SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA ⁽²⁾.

1. *Richiamo di risultati precedenti. Conclusione.* In alcune note, pubblicate nei « Rendiconti dell'Acc. dei Lincei » ho trattato il problema del condensatore elettrico a piatti circolari, riducendolo a due equazioni di Fredholm che nel caso del condensatore infinitamente sottile, si risolvono immediatamente applicando il teorema di Fourier ⁽³⁾.

L'elemento praticamente importante, cioè la capacità, si riduce allora al calcolo dei due integrali funzioni di h :

$$(1) \quad e_{11} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty I_1(x) \frac{\sin x}{x(1 - e^{-hx})} dx,$$

$$(2) \quad e_{21} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty I_1(x) \frac{\sin x}{x(1 + e^{-hx})} dx,$$

legati dalla relazione funzionale, di deduzione immediata,

$$(3) \quad e_{11}(h) + e_{21}(h) = 2e_{11}(2h),$$

(1) U. CRUDELI, *Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie, nei liquidi (seconda approssimazione)*. « Nuovo Cimento », (7) 25 (1923), pp. 43-62, voir aussi U. CRUDELI, *Sulle onde progressive di tipo permanente oscillatorie*, « Rend. Acc. Linc. », 28, II (1919) pp. 174-178; 29, II (1920), pp. 265-269.

(2) Presentata nella seduta del 4 aprile 1925.

(3) *Teoria del condensatore elettrico a piatti circolari.* « Rend. Lincei », XXIX, 2° semestre 1920.

dove a è il raggio dei piatti, l la loro distanza, $h = \frac{l}{a}$ e $I_1(x)$ è la funzione di Bessel di 1^a specie e d'ordine uno⁽¹⁾.

Le e si possono ottenere sviluppando in serie secondo le potenze di e^{-bx} le frazioni $(1 \pm e^{-bx})^{-1}$ e integrando per serie: i singoli termini dello sviluppo hanno relazione col problema del disco unico, relazione che serve appunto a calcolarli.

Nel caso, che più interessa per la pratica, che uno dei piatti sia a potenziale zero⁽²⁾ si ha, detta C la capacità,

$$(4) \quad C = \frac{1}{2} [e_{11}(h) + e_{21}(h)] = e_{11}(2h),$$

per la (3).

Dimostrerò che

$$(5) \quad C = \frac{2}{\pi} a \varphi(2h) + C_1,$$

dove

$$0 < \varphi(2h) < 1,$$

e $C_1 = \frac{a}{4h}$ è la capacità quale viene calcolata colla formola ordinaria. Si deduce dalla (3)

$$(5') \quad \frac{C - C_1}{C} = \frac{\frac{2}{\pi} a \varphi(2h)}{\frac{2}{\pi} a \varphi(2h) + C_1} < \frac{8h}{\pi},$$

e quindi un estremo superiore dell'errore relativo che si commette applicando la formola ordinaria.

Per esempio quando $h = \frac{1}{100}$ l'errore relativo è certamente minore del tre per cento.

2. *Richiami sul problema del disco unico.* Il problema dell'equilibrio elettrico pel disco unico si può trattare in vari modi.

Si può, come fa il Kirchhoff, considerare il disco come caso limite di un elissoide di rotazione⁽²⁾; si deduce allora che le superficie equipotenziali sono ellissoidi di rotazione, la cui ellisse meridiana ha per fuochi gli estremi del segmento sezione del disco col piano meridiano e quindi le linee di forza, nel piano meridiano, sono iperboli aventi i medesimi fuochi: è questo il risultato che dovrò utilizzare.

(1) *Capacità del condensatore a piatti ∞^{te} sottile.* «Rend. Lincei», 1° semestre 1922.

(2) *Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus.* Dritte Vorles. § 6.

Dalla trattazione del Beltrami ⁽¹⁾ risulta che le linee di forza hanno in coordinate cilindriche (r, τ) , l'equazione $W(r, \tau) = \text{costante}$, dove

$$(6) \quad W(r, \tau) = \pm \frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\mp \tau s} I_1(rs) \frac{\sin s}{s} ds,$$

quando il raggio del disco sia uno: (si ricordi che $I_1(x) = -I'_0(x)$ per l'opportuno confronto colla formola del Beltrami) valendo il segno \mp secondo che $\tau \gtrless 0$.

La quantità di elettricità contenuta nella porzione $(0, \alpha)$ del disco è

$$(7) \quad -W(\alpha, 0) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(\alpha s) \frac{\sin s}{s} ds = \frac{2}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2}\right).$$

3. *Calcolo delle e mediante sviluppo in serie.* Si ha

$$\frac{1}{1 + e^{-bx}} = 1 - e^{-bx} + e^{-2bx} - e^{-3bx} \dots$$

e integrando per serie, come si dimostra che è legittimo ⁽²⁾, si trova dalla (2).

$$\frac{e_{21}}{a} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-nbx} I_1(x) \frac{\sin x}{x} dx,$$

(1) *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* « Opere », vol. III, pp. 349-382, §§ 1-6.

(2) Posto $I_1(x) \frac{\sin x}{x} = f(x)$ il nostro integrale è $I = \int_0^{\infty} f(x) \frac{dx}{1 + e^{-bx}}$;

ora

$$\frac{1}{1 + e^{-bx}} = 1 - e^{-bx} + e^{-2bx} - \dots \pm e^{-(n-1)bx} \mp \frac{e^{-nbx}}{1 + e^{-nbx}},$$

e quindi moltiplicando per $f(x)$ e integrando si ha:

$$I = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \int_0^{\infty} f(x) e^{-sbx} dx \pm \int_0^{\infty} f(x) \frac{e^{-nbx}}{1 + e^{-nbx}} dx,$$

La legittimità dello sviluppo in serie sarà provata quando sia dimostrato che il valore assoluto dell'ultimo integrale tende a zero per n tendente all' ∞ . Dettolo R_n avremo:

$$R_n = \left| \int_0^{\infty} f(x) \frac{e^{-nbx}}{1 + e^{-nbx}} dx \right| \leq \int_0^{\infty} |f(x)| \frac{e^{-nbx}}{1 + e^{-nbx}} dx,$$

e siccome $|f(x)|$ è sempre finita $|f(x)| < A$, e $\frac{1}{1 + e^{-nbx}} \leq 1$ si ha:

$$|R_n| < A \int_0^{\infty} e^{-nbx} dx = \frac{A}{nb},$$

che tende a zero col tendere di n all' ∞ .

e per la (6)

$$= - \sum_0^{\infty} (-1)^n W(1, n h).$$

Ricordiamo ora che le linee di forza $W = \text{cost}$ sono iperboli aventi i fuochi nei punti $(-1, 1)$ all'asse r : potremo allora per calcolare W riferirci ai punti in cui l'iperbole della famiglia, determinata dal punto $r = 1$, $z = n h$, taglia l'asse focale e applicare quindi la (7). Si osservi che $n h$ è il parametro p dell'iperbole e quindi se α è il semiasse trasverso, β l'altro semiasse, dalle relazioni

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = p, \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

si ricava

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1},$$

da cui, ponendo per comodità di calcolo

$$(8) \quad h = 2 k,$$

$$\alpha = \sqrt{n^2 k^2 + 1} - n k.$$

Per l'osservazione fatta sulle linee di forza e per la (7) avremo,

$$\begin{aligned} -W(1, n h) &= -W(1, 2 n k) = -W(\sqrt{n^2 k^2 + 1} - n k, 0) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - (\sqrt{n^2 k^2 + 1} - n k)^2} \right), \end{aligned}$$

e l'integrazione è eseguita.

Se diciamo a_n il coefficiente di $\frac{2}{\pi}$ nell'espressione ora trovata si può con facili trasformazioni ottenere

$$(I) \quad a_n = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2 k^2}} + 1}},$$

da cui si vede che a_n tende a zero, come è necessario, col tendere di n all'infinito.

Per quanto riguarda e_{21} si ha in definitiva la formula

$$(II) \quad e_{21} = \frac{2}{\pi} a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

(che si presta utilmente al calcolo pel fatto che è a termini decrescenti e di segno alternato). Se ne deduce in particolare

$$e_{21} < \frac{2}{\pi} a ,$$

quindi

$$(9) \quad e_{21} = \frac{2}{\pi} a \psi(b) \quad , \quad \text{dove } 0 < \psi(b) < 1 .$$

Anche $\frac{e_{11}}{a}$ si calcola mediante sviluppo in serie: infatti dallo sviluppo

$$\frac{1}{1 - e^{-bx}} = 1 + e^{-bx} + e^{-2bx} + \dots ,$$

si ottiene dalla (1) integrando per serie (1)

$$(III) \quad e_{11} = \frac{2}{\pi} a \sum_{n=0}^{\infty} a_n ,$$

dove il termine generale a_n è dato dalla (I).

4. *Riduzione di e_{11} ad un integrale.* La serie (III) per e_{11} , che si presenta poco conveniente pel calcolo pratico, si può ridurre alla somma di un integrale e di una parte residua di cui è noto il limite superiore.

Consideriamo perciò l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2 k^2} + 1}} \right) dn ,$$

dove la funzione integranda vale 1 per $n = 0$;

se $sh x$, $ch x$, $th x$ sono seno, coseno e tangente iperbolici di x , colla sostituzione

$$1 + \frac{1}{k^2 n^2} = ch^2 x ,$$

(1) Ragionando come precedentemente troveremo:

$$| R_n | = \int_0^{\infty} \left| \frac{f(x)}{1 - e^{-bx}} \right| e^{-n b x} dx .$$

Ora $\frac{f(x)}{1 - e^{-bx}}$ è sempre finita anche per $x = 0$ perchè ivi hanno uno zero di primo ordine tanto $f(x)$, perchè lo ha $I_1(x)$, quanto il denominatore: ne segue $\left| \frac{f(x)}{1 - e^{-bx}} \right| < B$ e quindi che $\lim_{n=\infty} R_n = 0$.

quindi

$$d n = - \frac{1}{k} \frac{2 c h^2 x}{s h^2 x} d x ,$$

si ottiene con facili trasformazioni

$$I k = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{2 c h^2 x - 1}{(c h x + 1) c h^3 x} d x .$$

Questo nuovo integrale viene reso razionale ponendo

$$t g h \frac{x}{2} = y , \quad \text{quindi} \quad d x = \frac{1}{1 - y^2} d y ,$$

e si ottiene

$$I k = \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} y - \frac{y}{(1 + y^2)^2} + \frac{3 y}{2 (1 + y^2)} - \frac{y}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} ,$$

quindi (ricordando poi la (8))

$$(10) \quad I = \frac{\pi}{8 k} = \frac{\pi}{4 h} .$$

La funzione a_n , sotto il segno di integrale, è sempre decrescente perciò

$$\sum_1^{\infty} a_n < I < \sum_0^{\infty} a_n :$$

la differenza tra i due termini estremi è $a_0 = 1$ e si otterrà così

$$\sum_0^{\infty} a_n = I + \varphi(h) ,$$

dove

$$(9') \quad 0 < \varphi(h) < 1 ,$$

e avremo infine

$$(III') \quad e_{11} = \frac{a}{2 h} + \frac{2}{\pi} a \varphi(h) .$$

5. *Calcolo della capacità C quando uno dei piatti sia a potenziale zero.*
Quando uno dei piatti sia a potenziale zero

$$C = \frac{1}{2} \left(e_{11}(h) + e_{21}(h) \right) = e_{11}(2h) = \frac{a}{4 h} + \frac{2}{\pi} a \varphi(2h) ,$$

dimodochè per conoscere la capacità occorrerebbe conoscere $\varphi(2h)$.

Senonchè nelle applicazioni importa in modo precipuo avere una formola approssimata pel cui errore relativo si conosca un limite superiore sufficientemente basso.

A queste condizioni soddisfa la formola precedente. Si osservi infatti che h è molto piccolo quindi (prescindendo dal fattore comune a) il termine $\frac{1}{4h}$ è enormemente preponderante sull'altro $\frac{2}{\pi} \varphi(2h)$ che è certamente minore della unità.

Si osservi poi che $\frac{a}{4h} = \frac{\pi a^2}{4\pi l} = C_1$ (capacità quale viene calcolata con la formola ordinaria; si ottiene così la conclusione che è dimostrata nel § 1.

Chimica. — *La capacità di reazione allo stato solido tra anidridi e ossidi metallici* ⁽¹⁾. Nota di F. DE CARLI, presentata dal Corresp. N. PARRAVANO.

Della reagibilità allo stato solido tra anidridi e ossidi metallici si sono occupati Hedwall, Mazzetti e De Carli.

Hedwall ⁽²⁾ ha mostrato che la silice a temperature notevolmente inferiori a quelle di fusione è capace di reagire con CaO, SrO, BaO, MgO e, a proposito di una ricerca sulla azione catalitica che alcuni ossidi esercitano sulla scomposizione termica del biossido di bario, ha messo in evidenza che allo stesso modo si comportano tutta una serie di ossidi (MgO, CaO, WO₃, MoO₃, Al₂O₃, SiO₂, Cr₂O₃, ecc.) con l'ossido di bario.

In seguito lo stesso autore ⁽³⁾ ha mostrato che allo stato solido sono possibili anche reazioni di spostamento tra ossidi e sali metallici, ad es., tra gli ossidi di bario, calcio, stronzio, ecc. e i carbonati di magnesio e di calcio, i solfati di bario, calcio e stronzio ed i fosfati di bario, stronzio, piombo ed argento.

Recentemente Mazzetti e De Carli ⁽⁴⁾ hanno provato che anche l'anidride borica si comporta come la silice e che se si riscaldano miscugli di anidride borica e ossidi metallici si osservano a temperature più o meno elevate rilevanti effetti termici dovuti a reazioni che si verificano fra i due ossidi prima che anche uno solo di essi sia portato a fusione.

Le ricerche che qui espongono riguardano la reagibilità allo stato solido tra le anidridi molibdica, tungstica, vanadica SnO₂, PbO₂, Cr₂O₃, Bi₂O₃,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

(2) «Zeit. f. anorg. Chem.» 98; 57; 1916 - 104; 163; 1919 - 108; 119; 1919.

(3) «Zeit. f. anorg. Chem.» 122; 181; 1922 - 128; 1; 1923 - 135; 49; 1924 - 140; 243; 1924.

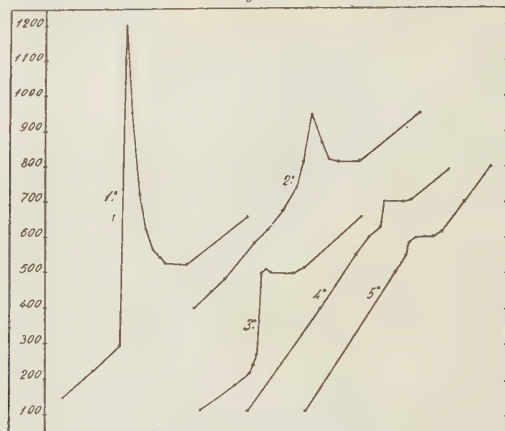
(4) «Rend. Acc. Lincei» 33; 512; 1924.

Al_2O_3 , ed ossidi metallici di varia natura. Il metodo seguito è quello già descritto nel caso dell'anidride borica e sostanzialmente consiste nel determinare con tutte le cautele del caso la curva di riscaldamento di miscugli in proporzioni equimolecolari dei due ossidi.

COMPORTAMENTO DELL'ANIDRIDE MOLIBDICA CON GLI OSSIDI METALLICI.

MoO_3, BaO - I fenomeni osservati durante il riscaldamento di miscugli equimolecolari dei due ossidi sono riportati nel diagramma 1°. Come si vede a 290° si ha una reazione accompagnata da uno sviluppo di calore così notevole che in $25''$ la temperatura sale fino a 1200° . Nella esperienza dell'Hedwall (loc. cit.) tra BaO e MoO_3 la reazione comincia a 370° e la temperatura sale soltanto sino a circa 900° . Il prodotto che si ottiene è una massa bianca friabile.

Fig. 1



MoO_3, CaO - In questo caso la reazione ha inizio tra 600° e 650° ; dapprima l'innalzamento di temperatura non è molto forte, ma a 750° si ha un notevole sviluppo di calore che porta la massa in pochi secondi a 950° . Il prodotto è simile per aspetto a quello ottenuto col bario. Diagramma tipo 2°.

MoO_3, PbO - La reazione incomincia intorno ai 650° ; in $20''$ si sale 817° ; si ottiene una sostanza polverulenta di colore giallo che comincia a fondere tra 1200° - 1300° . Diagr. tipo 2°.

MoO_3, SnO - La reazione è abbastanza vivace; da 400° si sale in $30''$ a 620° . La sostanza è bianco grigiastro. Diagr. tipo 3°.

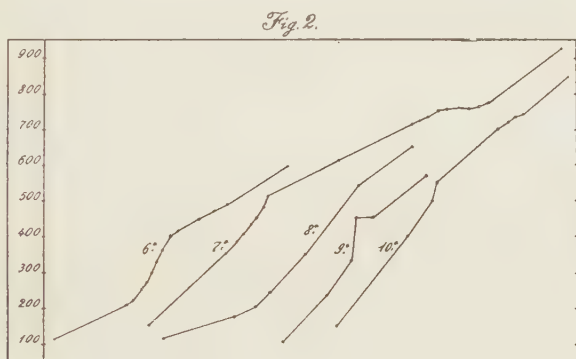
MoO_3, CdO - Da 420° fino a 570° si nota un innalzamento più rapido della temperatura dopo di che la curva riprende l'andamento normale fino

a 740° dove si nota un breve arresto. Il prodotto che si ottiene è bianco e parzialmente fuso. Diagr. tipo 7°.

MoO₃, NiO - L'effetto termico è molto debole e ha inizio a circa 495°. Si ottiene una massa polverulenta di colore verde-pisello. Diagr. tipo 10°.

MoO₃, CoO - Reazione debole che si inizia tra 400° e 420° e termina a 500°. Notevole rallentamento verso i 750°. Massa polverulenta grigia. Diagr. tipo 7°.

MoO₃, ZnO - La curva di riscaldamento di questo miscuglio presenta un debole effetto termico a 270° ed un secondo effetto pure molto debole a 720°. È da notare però che mentre il miscuglio di partenza è colorato debolmente in giallo, il prodotto ottenuto si presenta come una massa polverulenta bianca. Diagr. tipo 8°.



Ho sperimentato pure con l'ossido di magnesio, ma in questo caso non si è osservato nessun fenomeno apprezzabile.

COMPORTAMENTO DELL'ANIDRIDE TUNGSTICA CON GLI OSSIDI METALLICI.

WO₃, BaO - La reazione si inizia a 190°, si sviluppa una notevole quantità di calore e in 45'' circa si giunge a 430°. Per lo stesso miscuglio Hedwall ha osservato una reazione notevolmente più debole; che si può appena apprezzare dalla curva di riscaldamento. Il prodotto è bianco e polverulento. Diagr. tipo 3°.

WO₃, CaO - La reazione incomincia a 245° e termina a 510°. Il prodotto ha un aspetto simile al precedente. Diagr. tipo 3°.

WO₃, PbO - La reazione incomincia in modo notevole a 210° e la temperatura sale in breve fino a 420°. Si ottiene una massa di colore giallo chiaro. Diagr. tipo 6°.

WO₃, SnO - L'effetto termico è relativamente debole e comincia ad apparire a 265°. Il prodotto è di colore grigio-bianco.

WO_3 , ZnO e WO_3 , MgO - In questi due casi gli effetti termici sono poco notevoli. Ciò malgrado deve ritenersi che reazione si compia perchè i prodotti di partenza, ambedue di colore giallo, si trasformano in masse bianche.

WO_3 , CdO - La reazione ha inizio a 250° , non è molto notevole ma si può apprezzare. Diagr. tipo 6°.

WO_3 , NiO e WO_3 , CoO - Anche in questi due casi si hanno effetti termici non molto forti. Il miscuglio con l'ossido di nichel reagisce verso i 260° e quello con l'ossido di cobalto verso i 255° . Però anche in questo caso la reazione deve ritenersi che si verifichi a causa del cambiamento di aspetto che subiscono le masse. Diagr. tipo 8°.

COMPORTAMENTO DELL'ANIDRIDE VANADICA CON GLI OSSIDI METALLICI.

V_2O_5 , BaO - La reazione è molto vivace, incomincia a 270° circa e sviluppa tanto calore da portare la massa a fusione. La temperatura sale rapidamente fino a 510° poi si arresta per breve tempo e torna infine a salire regolarmente. Il prodotto è fuso e di colore verde azzurrognolo. Diagr. tipo 3°.

V_2O_5 , CaO - La reazione diviene sensibile a 630° . Il prodotto fonde verso 700° ed è di aspetto cristallino colorato in marrone. Diagr. 4°.

V_2O_5 , PbO - La curva di riscaldamento di questo miscuglio presenta un effetto termico piuttosto debole tra 520° e 600° . A 600° la massa fonde. Diagr. 5°.

V_2O_5 , CdO - Reazione debolissima verso 480° . Il prodotto è fuso e di colore grigio-verde. Diagr. tipo 8°.

V_2O_5 , SnO - In questo caso si ha una reazione molto vivace che si inizia verso i 250° e termina a 530° . Il prodotto è fuso e di colore verde. Diagr. tipo 3°.

V_2O_5 , ZnO e V_2O_5 , MgO - In entrambi i casi la reazione è piuttosto debole. La prima si inizia verso i 260° e il prodotto fonde a 635° . La seconda comincia a 455° e la massa fonde a 660° .

Le prove eseguite con Cr_2O_3 , SnO_2 , PbO_2 , Bi_2O_3 , Al_2O_3 hanno portato ai risultati seguenti:

Cr_2O_3 - Reagisce con gli ossidi di bario e di calcio. Nel primo caso la reazione comincia a 220° ed è molto vivace, nel secondo si ha solo un debole effetto termico fra 520° e 570° circa. Diagr. tipo 3° e 10°.

Tutti gli altri ossidi non sono capaci di reagire altro che con l'ossido di bario.

Ricollegando questi risultati con quelli di precedenti ricerche si può dire, in via generale, che gli ossidi con proprietà di anidridi possono reagire

allo stato solido con ossidi di natura metallica. La reagibilità naturalmente varia con la natura dell'anidride e degli ossidi impiegati; e le reazioni più vivaci si ottengono con gli ossidi dei metalli alcalino terrosi.

Tra le anidridi quella che reagisce meglio con la massima parte degli ossidi metallici, è l'anidride borica; vengono dopo la molibdica, la tungstica, la vanadica e la silicica.

Cr_2O_3 presenta ancora reagibilità sia con l'ossido di bario che con l'ossido di calcio, ma SnO_2 , PbO_2 , Bi_2O_3 , Al_2O_3 , tutte sostanze nelle quali le proprietà di anidridi sono molto deboli, non reagiscono allo stato solido altro che con l'ossido di bario.

Meteorologia. — *Alterazioni nelle configurazioni isobariche portate dallo smorzamento dell'aria.* Nota di EMILIO ODDONE presentata dal Corrisp. LUIGI PALAZZO.

In due mie precedenti note, riassumendo i risultati intorno al valore del coefficiente di attrito η dell'aria nella libera atmosfera, ho accennato al suo rapido aumento nei primissimi strati rasente terra, alla sua costanza, poi, fino a circa 3000 metri, ed al suo altissimo valore rispetto a quello del coefficiente fisico sperimentale μ . Ho sottolineato le difficoltà di calcolare η presso terra: tanto che anche i più valenti fisici-matematici, specialisti, suggerirono di accontentarci di una espressione frizionale nella quale η entra come fattore, e che ricavasi da formola empirica, tratta dall'osservazione, anzichè dalle equazioni idrodinamiche⁽¹⁾. La forza frizionale che ne viene fuori, risulta molto più piccola del coefficiente d'attrito η .

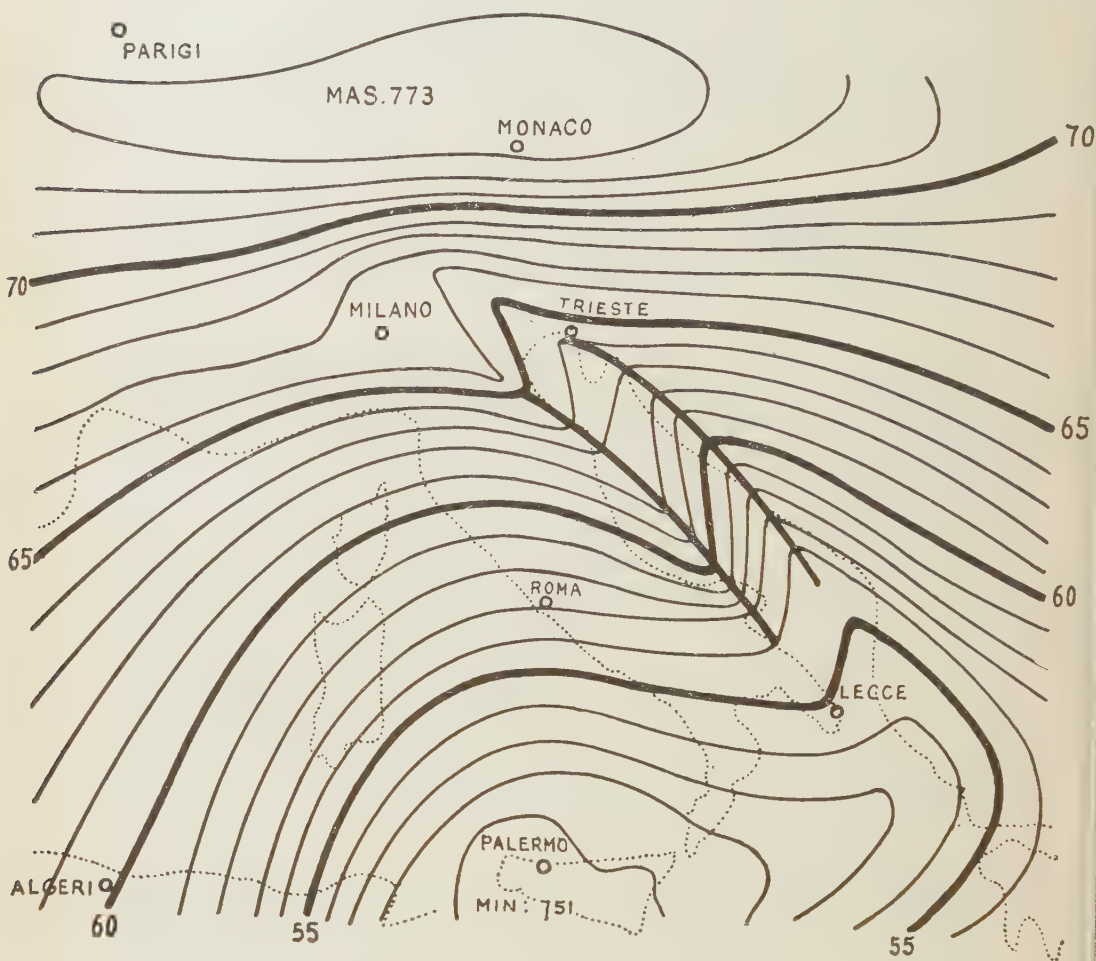
L'applicazione della formola empirica dà solo buoni frutti quando, grazie ad una fitta rete d'osservazioni dei venti, si ha la possibilità di avere l'accelerazione, e quando viene riferita al regime d'un'aria che soffia su di una vasta pianura. Nel caso che il terreno sia topograficamente accidentato, si arriva da capo a risultati men buoni.

Sull'argomento presento uno studio fatto sulla carta delle pressioni e dei venti quando, nella stagione fredda, un anticiclone stagna sugli altipiani franco-bavaresi ed il minimo di pressione è sul mar Jonio⁽²⁾. In discesa da Nord a Sud, troviamo l'anticiclone fasciato da parecchie isobare serrate

(1) La formola empirica è la seguente: forza d'attrito eguale all'accelerazione del vento meno la forza del gradiente, meno la forza deviatrice per la rotazione terrestre. L'accelerazione si deduce dalla carta dei venti, la forza del gradiente si desume per derivazione dalla carta isobarica, la forza deviatrice è la solita $2\omega U \sin \varphi$.

(2) La fig. riproduce una delle cartine che illustrano questo, da noi, comunissimo tipo isobarico: si riferisce al giorno 30 gennaio 1924. Vedi « Boll. quotidiano del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica ».

lungo la catena alpina al cui contorno si modellano: e poi una pressione, circa uniforme, sul Lombardo-Veneto ed alto-Adriatico. Le isobare che seguono degradano verso il centro di depressione, con andamento regolare sul Tirreno, e con palese irregolarità sull'Adriatico. Le sinuosità, che le isobare qui descrivono, assumono un'ampiezza straordinaria, dando a dive-



dere che l'aria su di un fronte paragonabile alla lunghezza di quel mare, avvala e gonfia lungo due linee, luoghi geometrici delle saccature verso l'anticiclone, rispettivamente dei promontori d'aria verso l'area ciclonica.

La sella e la cresta di questa specie d'onda atmosferica fissa sono parallele tra loro ed ai monti che le fiancheggiano e chiudono.

Così l'anticiclone ed il ciclone primari restano non solo divisi da due catene di monti concentriche, costituite l'esterna dall'Alpi e dalle Dinariche,

l'interna dall'Appennino; ma altresì da una fossa e da una diga d'aria che si distendono lungo i versanti interni che si fronteggiano.

Mentre perdura questa situazione, qual'è il regime dei venti?

Questi noi osserviamo quando già hanno fatto la loro discesa sull'Adriatico che, in direzione N-NE—S-SW tagliano trasversalmente. Essi tendono al minimo moto; tolgono l'aria da un versante e l'accumulano su quello di fronte, esercitano insomma un'azione locale moderatrice del pendio dall'anticiclone al ciclone, azione che arriva ad un'inversione delle pressioni rispetto la generale discesa ⁽¹⁾.

Questi venti, quasi iniettati nell'aria calma della conca adriatica, turbano la situazione barica e suscitano il dislivello con un'azione cinetica analoga a quella che avviene nelle esperienze idrodinamiche citate nella mia nota precedente ⁽²⁾.

I valichi montani attraverso le Dinariche si comportano, rispetto al vento che li percorre, come la tubolatura di comunicazione tra due vasche idrodinamiche. La sella, e cioè gli avvallamenti delle superfici isobariche, è conseguenza del forte richiamo e della rarefazione dell'aria attorno la sezione contratta. La cresta, ossia il promontorio, ovvero la diga d'aria ai piedi del versante settentrionale appenninico, sono a lor volta dovuti all'accumulo dell'aria ostacolata nelle vie d'uscita. Tutto succede come nelle suddette esperienze idrodinamiche, per quanto mai i loro Autori, e cioè il Venturi ed il Feilitsch, abbiano immaginato che i loro esperimenti, alle vasche, potessero avere una larga, magnifica verifica e conferma nel campo della meteorologia.

L'interessante di questi fenomeni sta in ciò che dessi avvengono ovunque sono catene montuose, valli chiuse, stretti di mare e mari interni. Risulta sempre che con tempo ventoso, le isobare alterano la loro configurazione nel senso indicato. Tendono a mantenersi parallele alle dette catene, ai detti, stretti, agli stessi ostacoli aeriformi; e quando sono costrette a penetrare

(1) Questi venti di risucchio, contrari alla corrente principale e dovuti ad inversione di pressione, sono confermati nelle Alpi Centrali. L'aria stagnante sulla piana paludosa del Vercellese e del Novarese quando vige il descritto tipo isobarico, viene richiamata come debole vento su pel versante alpino meridionale, a cui somministra piogge copiose l'inverno ed un grado di umidità eccessivo l'estate.

È doveroso di ricordare che questa aspirazione dell'aria per via dei venti che attraversano le Alpi, fu già descritta e rettamente interpretata dal Prof. L. De Marchi venticinque anni or sono. Sono lieto, valendomi della teoria dello smorzamento, di portare un contributo alle conoscenze di quella funzione meccanica dei monti sul vento che, ancora nel 1920, lo stesso illustre geofisico di Padova diceva non ancora sufficientemente studiata, e che lo fu poi grazie ai lavori del Föyn e dei citati Hesselberg e Sverdrup.

(2) Mentre il vento ha circa una direzione N-NE—S-SW la direzione della resistenza data dalla normale all'onda aerea fissa, corre circa in direzione SW-NE. L'anomalia non riesce nuova, essa è la conferma di una legge annunciata dall'Hesselberg, secondo la quale le forze frizionali fanno colla direzione del vento un angolo di 28° circa.

nelle valli, nei mari chiusi da monti, ecc. lo fanno colle sinuosità descritte.

Qualitativamente l'andamento del fenomeno è quello: resta a darne la valutazione quantitativa.

All'esterno delle due catene montuose è il gradiente di pressione a comandare il vento, ed il suo valor medio è $G = 1,4 \frac{\text{mill. di merc.}}{\text{gradi merid.}}$.

Nell'interno delle due catene, promontori e saccature, invertono il suddetto gradiente, e la cartina dice che, sul Veneto e sull'Alto e Medio Adriatico, quel giorno, il gradiente contrario valeva circa $2 \frac{\text{mill. di merc.}}{1,7 \text{ gradi merid.}}$ essendo

$1^{\circ},7$ la distanza tra la cresta e la sella dell'onda aerea permanente. Sul Basso Adriatico valeva $1 \frac{\text{mill. di merc.}}{1,7 \text{ gradi merid.}}$, e più giù diminuiva a zero.

Se il fenomeno è stato rettamente interpretato, dovremmo veder soddisfatta l'equazione (1) della mia prima nota:

$$(1) \quad \frac{m}{K} \frac{dv}{dt} = dp = m g H.$$

Il membro di destra rappresenta il lavoro potenziale per sollevare l'aria di H metri; quello di sinistra indica il lavoro necessario per compiere la variazione di volume $\frac{dv}{dt}$ e lo posso quindi sostituire coll'espressione usuale dell'energia cinetica, col vantaggio di riportarmi ad una relazione tra la velocità del vento e le pressioni, tipo Bernouilli. Viene:

$$(2) \quad \frac{1}{2} [U^2 - u^2] = g H$$

U ed u sono le velocità del vento prima e dopo lo smorzamento. Ad U , le osservazioni anemometriche assegnano il valore di circa 24 m/s. Per u , a seconda della configurazione topografica locale vengono velocità varie: 17 m/s, 8 m/s, 4 m/s, zero.

In questi vari casi risolvo la (2) rispetto H . Il prospetto seguente dà alla sua 3^a colonna questi H , *dislivelli teorici*, che poi alla colonna 4^a confronterò coi *dislivelli osservati*.

Velocità del vento primario U metri/sec. 1 ^a	Velocità del vento smorzato u metri/sec. 2 ^a	Dislivelli teorici $H \text{ metri} = \frac{1}{2g} [U^2 - u^2]$ 3 ^a	Dislivelli osservati metri 4 ^a
24 vento impetuoso	17 vento forte (Pesaro, Ancona).	14,6	14
24 » »	8 vento moderato (Foggia, Viesti).	26,1	24
24 » »	4 vento debole (Rovigo).	28,5	24
24 » »	0 calma (Chieti, Teramo).	28.8	28

I dislivelli teorici crescono al crescere dello smorzamento da 15 a 29 metri. I dislivelli osservati, tra i promontori e le saccature, lungo la zona da Venezia a Foggia, l'unica qui presa in considerazione, crescono al crescere dello smorzamento, ossia al diminuire di u , da 14 a 28 metri circa d'aria normale.

Il confronto è soddisfacente, e penso non si possa pretendere di più senza abusare nell'applicazione della legge Bernouilli.

I detti processi di smorzamento hanno analogia con quanto avviene sui pochi cm² di superficie dei tubi compressorî ed aspiratori nell'anemografo del Dines. In quest'apparecchio i venti forti, cooperando la compressione e l'aspirazione, danno variazioni di pressione fino a 8 cm. d'acqua pari a circa metri 60 d'aria, indipendentemente dalla superficie. La cifra è un pò divergente dai dislivelli che in occasione di venti forti si avvertono ai due versanti opposti di una catena montuosa; ma se questi sono minori, occorre notare che le differenze di pressione nei tubi anemometrici del Dines provengono da due elementi di corrente che ad un dato momento possono avere velocità molto intense e si esercitano su ambienti nettamente separati; mentre in natura sul vasto campo d'azione si esercita solo una media energia dell'aria, ed i due versanti sono lungi dall'essere nettamente divisi.

Il colpo di vento isolato nella libera atmosfera ha anch'esso un'azione analoga, ma per la massa enorme su cui la sua azione va ripartita, riesce evanescente, od almeno soltanto avvertibile ai vicini microbarografi.

Zoologia. — *Sull'autotomia del lobo posteriore del sacco vitellino nel « Salmo salar L. »* ⁽¹⁾. Nota di G. BRUNELLI presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Da tempo è noto che il sacco vitellino di molti embrioni di *Salmo salar* presenta questa anomalia, di strozzarsi ad un certo momento in corrispondenza al lobo della estremità posteriore, in modo che l'embrione presenta una vescicola vitellina doppia il cui lobo distale più o meno grande è destinato a distaccarsi, mediante atrofia del peduncolo, mentre che la parte anteriore viene regolarmente riassorbita, durante l'accrescimento dell'avannotto.

Ryder (On certain features of the development of the salmon. Proc. U. S. Nat. Museum, Vol. VIII, 1885) aveva già rilevato tale anomalia, ritenendola non letale ma dannosa, perchè mentre ammette, come in realtà è, che il peduncolo dopo il distacco del lobo distale si cicatrizza, viceversa nei riguardi dell'accrescimento ritiene che gli individui che non presentano tale anomalia siano « more fortunate fellows » di quelli che perdono il lobo distale. Questo concetto è stato esagerato da Hofer, il quale dubita perfino che possa trattarsi di una vera malattia dei salmoni, noverandola nel suo trattato sulle malattie dei pesci e lasciando perciò aperta la questione ⁽²⁾.

Anche la Plehn, nel suo interessante riassunto sulle malattie dei pesci nell'« *Handbuch der Binnenfischerei* » di Demoll-Maier, ricorda giustamente i dubbi esistenti circa il significato di tale anomalia, ritenendo di non potersi pronunciare circa la sua vera natura.

Ho ritenuto quindi opportuno, riprendere lo studio di tale questione approfittando di numerosi lotti di embrioni di *Salmo salar*, schiusi da uova provenienti dalla Germania nell'Incubatorio Centrale del R. Stabilimento Ittiogenico di Roma, che presentavano con frequenza tale anomalia, e sulla quale venne richiamata la mia attenzione.

Dopo aver osservato che tale anomalia non sembra in rapporto con alcuna infezione parassitaria, ho osservato questo fatto interessante, che la circolazione nel lobo vitellino che si prepara a distaccarsi, si fa sempre più lenta finchè cessa del tutto, ciò che è posto in evidenza anche da qualche coagulo sanguigno.

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di idrobiologia (Roma).

(2) HOFER termina infatti il suo breve accenno su tale anomalia dicendo che « *Ueber die Ursache dieser Verbildung des Dottersackes ist z. Zt. noch nichts bekannt.* » *Handbuch der Fischkrankheiten*, München, 1904.

Il lobo che si distacca è più o meno grande, come se lo strozzamento si produca in diversi individui in tempo differente, o in condizioni differenti della circolazione vitellina, che per ovvie ragioni presenta sempre qualche anomalia. Lo stesso lobo può, o no, contenere gocce oleose.

L'interpretazione lascia adito a diverse supposizioni.

Si può infatti supporre che si tratti di vitello superfluo che viene eliminato e che questa maggiore o minore grandezza del lobo, e ancora la frequenza con cui la anomalia si presenta, sia in relazione con una maggiore o minore lentezza di sviluppo e che questa sia a sua volta in relazione con la temperatura (secondo la legge di van't Hoff controllabile nello sviluppo dei salmonidi).

Si può anche supporre che i prodotti catabolici dell'accrescimento embrionale si accumulino in parte nella estrema regione del vitello e che in certo modo, innanzi al regolarizzarsi della funzione renale, l'autotomia di un lobo del vitello costituisca per la giovane larva, un mezzo di liberarsi di queste sostanze, ciò che potrebbe essere studiato dal punto di vista della microchimica.

Resta il fatto che l'autotomia si verifica in seguito ad una modificazione del circolo sanguigno, che ad un certo momento varia nel vitello, in relazione anche alle modificazioni susseguenti allo stabilirsi della circolazione epatica.

Ciò che interessa è che la necrotizzazione che accompagna lo staccarsi del peduncolo è in relazione a questo rallentarsi e cessare della circolazione sanguigna nel lobo che si autotomizza, ed è interessante per la filogenesi degli annessi embrionali l'espulsione di una parte del vitello nello sviluppo di un pesce. Questo fenomeno rientrerebbe nel più vasto quadro della regolazione dell'accrescimento. Giard ha già distinto la autotomia in difensiva e gonoforica e converrebbe aggiungere l'autotomia regolativa dell'accrescimento.

Nella vera autotomia per via riflessa si ha poi un distacco rapido, mentre nell'autotomia preceduta da atrofia, come nel caso che ci occupa, il distacco è lento.

Morfologia comparata. — *Di un organo di senso derivato dal primo placode epibranchiale dei Selaci* ⁽¹⁾. Nota di SILVIO RANZI presentata dal Corrisp. F. RAFFAELE ⁽²⁾.

Che i placodi epibranchiali rappresentino abbozzi di organi di senso è, si può dire, cosa da tutti ammessa; ma i ricercatori generalmente li considerarono come abbozzi di organi di senso, che esistettero negli ipotetici protovertebrati, e, preoccupati dalle questioni inerenti al loro rapporto con gli abbozzi dei nervi, non si curarono di seguirne l'ulteriore destino, ovvero ne ammisero senz'altro come dimostrata l'effimera durata. La letteratura è quindi molto povera di ricerche sull'ultimo destino di questi placodi e ben poco ancora oggi, almeno per quello che riguarda i pesci, si conosce.

Sembra in complesso che i placodi delle fessure branchiali posteriori alla prima scompaiano in epoca abbastanza precoce dello sviluppo, senza lasciare traccia; ma forse, anche su questo argomento, occorrerebbero ricerche più accurate. Il placode della prima fessura branchiale invece in talune forme rimane e costituisce una piccola vescicola che presenta tutti i caratteri di un organo di senso ed ha diversi aspetti nelle diverse forme studiate. Il primo a constatare con sicurezza il fatto fu il Müller ⁽³⁾ nel *Lepidosteus osseus*; poco dopo lo sviluppo dell'organo fu studiato dall'Agar ⁽⁴⁾ in *Lepidosiren paradoxa* e omologato all'organo già descritto dal Pinkus ⁽⁵⁾ nell'adulto di *Protopterus annectens*. Lo stesso anno il Greil ⁽⁶⁾, conoscendo le ricerche di Agar, ne seguiva lo sviluppo nel *Ceratodus Forsteri* e successivamente ne constatava la presenza nel giovane. Recentemente il Vitali ⁽⁷⁾ scopriva l'organo

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(2) Presentata nella seduta del 2 maggio 1925.

(3) MÜLLER F. W., 1897, *Ueber die Entwicklung und morphologische Bedeutung der Pseudobranchie und ihrer Umgebung bei Lepidosteus osseus*, « Arch. f. mikr. Anat. », Bd. 49.

(4) AGAR W. E., 1906, *The Spiracular Gill Cleft in Lepidosiren and Protopterus*, « Anat. Anz. », Bd. 28.

(5) PINKUS F., 1894, *Die Hirnnerven des Protopterus annectens*, « Morphol. Arbeit », Bd. 4.

(6) GREIL A., 1906, *Ueber die Entstehung der Kiemendarmderivate von Ceratodus F.* « Verh. Anat. Ges. in Rostock ».

GREIL A., 1907, *Präparate und ein Wachsplattenmodell des Kiemenspaltenorganes der Hyomandibulartasche sowie der Pseudobranchie eines Ceratodusjungfisches von 62 mm. Körperlänge*. « Verh. anat. Ges. 21 Vers. Würzburg ».

(7) VITALI G., 1914, *Di un nuovo organo nervoso di senso nell'orecchio medio degli uccelli*. « Internat. Monats. f. Anat. u. Physiol. », Bd. 30.

VITALI G., 1915, *Sui disturbi funzionali e sulle lesioni istologiche dipendenti dalla distru-*

negli uccelli e nel *Vesperugo pipistrellus* e ne studiava accuratamente lo sviluppo e le funzioni. Il Vitali eseguì inoltre una serie di ricerche per vedere se negli anfibî, rettili ed altri mammiferi permanesse un derivato del primo placode epibranchiale e giunse alla conclusione che in tutte queste forme esso sparisce senza lasciare traccia.

Per quanto riguarda i selaci furono dai più antichi ricercatori descritti in rapporto allo spiracolo, numerosi diverticoli, che ebbero varia interpretazione; il Vitali ⁽¹⁾ dalla lettura di questi lavori intuì che uno di questi diverticoli potesse essere derivato dal primo placode epibranchiale, come era già stato supposto, ma non dimostrato, dal Wright ⁽²⁾ e dal Greil ⁽³⁾, e riuscì a vedere un ramo del facciale che in un adulto di *Mustelus laevis* andava ad un'appendice dello spiracolo che si presentava a forma di vescicola, ma per mancanza di materiale embriologico non poté pronunciarsi sul vero significato dell'organo.

Mentre io andavo seguendo con altro intento, ricerche embriologiche in selaci fui colpito nel vedere, in preparati eseguiti col metodo di Cajal, un ramo del VII che, in embrioni di *Scyllium canicula* molto avanti nello sviluppo, andava in corrispondenza di un diverticolo della parete dorsale della prima fessura branchiale. Volli vedere se questo diverticolo rimaneva nell'adulto e poi ne studiai lo sviluppo.

Ho eseguito le mie ricerche embriologiche su abbondantissimo materiale embrionale da me raccolto e sezionato costituito da serie di *Scyllium canicula* L., *Sc. stellare* L., *Mustelus vulgaris* M. T., *Pristiurus melanostomus* Raf., *Acanthias Blainvillii* Risso, *Torpedo ocellata* Raf., *T. marmorata* Risso, *Raia batis* L., *R. punctata* Risso, aumentato da serie di embrioni di *Must. vulg.* e *Prist. melan.* messe a mia disposizione dal prof. Federico Raffaele ⁽⁴⁾.

Nelle forme studiate lo sviluppo dell'organo presenta due diversi aspetti secondo che trattisi di squali o di batoidi.

zione dell'organo nervoso di senso da me descritto nell'orecchio medio degli uccelli. « Atti R. Accademia dei Fisiocritici in Siena ».

VITALI G., 1923, *Sul comportamento dell'organo della prima fessura branchiale in Athene noctua*. « Ricerche di Morfologia », vol. 3.

VITALI G., 1924, *Il comportamento dell'organo della prima fessura branchiale negli anfibî, nei rettili e nei mammiferi*. « Ricerche di Morfologia », vol. 4.

(1) VITALI, 1914, op. cit.

(2) WRIGHT R. R., 1885, *On the Hyomandibular Cleft and Pseudobranchs of Lepidosteus and Amia*. « Journ. of Anat. and Physiol. », vol. 19.

(3) GREIL, 1906, op. cit.

(4) Sento il dovere di ringraziare pubblicamente il prof. F. Raffaele non solo per questo, ma anche, e principalmente, per tutte le amorevoli cure che mi prodigò nei quattro anni e mezzo che passai nel suo laboratorio. Voglio anche ringraziare il prof. R. Dohrn e il prof. M. Fedele che mi dettero la maniera di eseguire queste ricerche.

*
* *

Negli squali non si osservano sensibili differenze tra le diverse forme studiate, almeno fino ad uno stadio molto inoltrato nello sviluppo, corrispondente a embrioni di *Scyllium* di 50 mm. di lunghezza; in stadi posteriori devono subentrare differenze tra le diverse forme, perchè, tra *Scyllium* ed *Acanthias*, uniche forme delle quali mi è stato possibile procurarmi stadi più avanzati, è una netta differenza di sviluppo che si ripercuote in un diverso aspetto dell'organo dell'adulto.

Il primo placode epibranchiale appare nell'embrione di *Scyllium canicula* di 17 mm. come un ispessimento ectodermico della parete dorsale della prima fessura branchiale posto presso lo sbocco all'esterno; in corrispondenza di questo ispessimento si porta ancora l'abbozzo del VII nervo cranico e vi aderisce. Progredendo lo sviluppo il placode a poco a poco si introflette formando una fossetta piuttosto profonda, che con la sua punta si dirige verso il globo oculare. Poichè il territorio del placode subisce un minore sviluppo delle parti vicine, che in questi stadi subiscono un attivissimo processo di accrescimento, l'organo, che prima occupava tutta la parete dorsale della fessura branchiale, viene a localizzarsi lungo la parete cefalo-dorsale di questa ed a poco a poco si porta in zone più profonde fino a giungere quasi in corrispondenza dell'apertura dello spiracolo nel faringe.

Mentre avvengono questi spostamenti l'abbozzo del nervo, che prima ampiamente aderiva al placode, si stacca da questo ed alla fossetta non va più che un esile tronco nervoso le cui diramazioni si possono vedere entrare nell'epitelio della fossetta, che si mantiene molto ispessito, e ramificarsi specialmente nella parete volta medialmente e caudalmente.

Nello *Scyllium* di 50 mm. l'organo ha la forma di una vescicola ellissoidale allungata in direzione dorso-ventrale e comunicante con un cortissimo canale, largo quasi quanto la vescicola, con la cavità dello spiracolo. Fino a questo stadio tutti gli squali studiati presentano uno sviluppo simile, e l'aspetto dell'organo, e del nervo che ad esso giunge, è tale da far supporre che l'organo non sia destinato ad atrofizzarsi in alcuna forma e si conservi invece nell'adulto, come ho potuto vedere avviene in *Scyllium* ed *Acanthias*.

È bene però notare che l'abbozzo di questo organo di senso non è l'unico diverticolo dello spiracolo, ma che insieme ad esso si forma un altro diverticolo, che si presenta molto più sviluppato durante tutti gli stadi sopra descritti. Questo diverticolo si trova però quasi allo sbocco esterno dello spiracolo, è tappezzato da un epitelio molto sottile, e si divide in due branche, dirette una cefalicamente, l'altra caudalmente, che si portano sotto la capsula uditiva verso il canale vescicolare orizzontale.

Nello *Scyllium* l'organo perde poco a poco la forma di una vescicola, comunicante con la cavità dello spiracolo mediante un cortissimo e largo canale, e prende la forma di un diverticolo cilindrico volto in direzione dorso-mediale, e sotto questo aspetto si osserva dopo la nascita nello *Scyllium stellare*, nel giovane e nell'adulto, nel quale si trova in corrispondenza della parte più cefalica della parete dorsale dello spiracolo, presso lo sbocco di questo nel faringe. In un individuo lungo 30 cm. l'organo è lungo 890 μ e misura un diametro trasversale di 205 μ ed uno cefalocaudale di 135 μ ; esso (fig. 1) appare costituito da un epitelio cilindrico molto spesso, con i



Fig. 1. — Sezione interessante l'organo di senso derivato dal primo placode epibranchiale di destra di uno *Scyllium stellare* adulto lungo 30 cm.

La sezione è trasversale rispetto al corpo dell'animale, l'organo è quindi sezionato obliquamente; due sezioni più indietro (sezioni di 10 μ) la sua cavità comunica con quella dello spiracolo c, iomandibolare; n, ramo del facciale che va all'organo; o, organo di senso; s, mucosa che tappezza lo spiracolo; VII, ramo iomandibolare del facciale.

nuclei ammassati verso la faccia volta verso il connettivo, mentre la parte che guarda il lume dell'organo appare con pochissimi nuclei. Il ramo del facciale (n) giunge sulla parete mediale dell'organo sulla quale abbondantemente si sfiocca. Lo sbocco dell'organo nello spiracolo avviene in una zona nella quale questo è tappezzato da una mucosa simile alla faringea, dalla quale la parete dell'organo nettamente si distingue per i caratteri istologici sopra ricordati. L'organo non ha nessun rapporto con lo scheletro.

Nell'*Acanthias Blainvillii* invece l'organo mantiene la sua forma di vescicola, comunicante mediante un canale a pareti molto più sottili con la

cavità dello spiracolo, mentre le pareti della vescicola sono molto ispessite, specialmente quella mediale, che presenta anche spiccati caratteri di epitelio sensorio. Questa descrizione riguarda embrioni di 13 cm. che dovevano essere molto prossimi alla nascita. In questo stadio non mi è stato possibile vedere i rapporti diretti col nervo, che però negli stadi precedenti si possono osservare, perchè non dispongo di preparati eseguiti col metodo di Cajal, e nei preparati eseguiti coi metodi comuni intorno all'organo si osserva una capsula di connettivo molto denso che impedisce di seguire il decorso del nervo. Si vede benissimo però, anche nei miei preparati, un esile ramo nervoso, che nasce direttamente dalla parte più caudale del ganglio genicolato, traversa la cartilagine che in questa zona separa il ganglio dall'organo di senso ed entra nella capsula connettiva, dove non mi è più possibile seguirlo. In complesso l'organo è molto più sviluppato che non nello *Scyllium*.

Dovrei ora parlare dei batoidi, ma di questi dirò in una successiva nota.

Ecologia. — *La previsione dell'entità del prodotto del mandorlo di un'annata in base all'andamento della temperatura dell'aria e delle precipitazioni nel trimestre gennaio-marzo.* Nota di FILIPPO EREDIA, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Da un anno all'altro nel raccolto del mandorlo si verificano delle oscillazioni, talora così ragguardevoli da modificare notevolmente l'entità di esso. Si ritiene che un rapido abbassamento della temperatura dell'aria e la successione di brinate più o meno intense nelle epoche in cui i mandorli cominciano ad alligare, siano le cause che più direttamente provocano tali oscillazioni, perchè allora non tutte le piccole drupe esposte senza protezione giungono alla maturazione.

Le subitanee diminuzioni della temperatura dell'aria il più delle volte derivano da azioni locali, e possono considerarsi piuttosto come cause occasionali, e quindi non dovranno esplicitare un'azione decisiva, qualora si consideri l'entità del prodotto di un'ampia superficie di terreno.

Pertanto se si vogliono meglio specificare le influenze climatiche sulla entità del prodotto del mandorlo, specialmente quando si vuole estendere la ricerca ad una larga zona, comprendente diverse provincie, sembra che convenga basarsi sulle determinazioni climatiche eseguite nel bimestre febbraio-marzo, che rappresenta il periodo dell'anno preparatorio e contemporaneo all'alligamento del mandorlo.

Ma poichè sulle regioni meridionali, in particolar modo, sogliono talora verificarsi inverni miti e la vegetazione può anticipare il progressivo sviluppo, converrà estendere la ricerca anche al gennaio, acciocchè si abbia un quadro completo delle condizioni climatiche del detto periodo dell'anno.

La ricerca rispondente a tutte le esigenze, dovrebbe estendersi ad un ragguardevole numero di anni, per determinare anche l'eventuale periodicità che alcuni credono di riscontrare nel prodotto del mandorlo in annate successive.

Purtroppo le statistiche agrarie in Italia hanno assunto la dovuta precisione soltanto dal 1909; e siamo quindi lontano dal pensare che un sedicennio di dati possa consentire la completa disamina delle correlazioni che esistono tra fattori climatologici e prodotto del mandorlo. Tuttavia riteniamo utile uno studio delle concomitanti osservazioni meteorologiche, poichè ci guiderà se non altro nell'indicare sommariamente le azioni di alcuni fattori climatici, rinviando ad altra epoca il particolare esame di siffatte influenze.

Per una ricerca che si presenta così generale, converrà limitarsi alla temperatura dell'aria e alla pioggia: i due fattori climatici che preponderano nella definizione delle condizioni climatiche di una data annata. E sarà bene considerare i dati relativi alle regioni ove la coltura del mandorlo è più intensiva, ossia Sicilia e Puglie, che complessivamente danno 1,030,000 quintali, di fronte ai 1,135,000 quintali della produzione media annua di tutta l'Italia. Attraverso tale disamina sarà forse possibile dedurre qualche correlazione con la temperatura dell'aria e con la pioggia nel periodo gennaio-marzo, per formulare previsioni circa l'ordine di grandezza del raccolto di una data annata.

Per tale genere di ricerche è utile fondarsi su un sufficiente numero di dati rilevati in località di diversa ubicazione in maniera che dall'insieme di essi possa ricavarsi, con sufficiente approssimazione, il carattere termometrico e pluviometrico dell'intera superficie presa in esame. A tali esigenze corrispondono per la Sicilia orientale e centrale — ove la coltura del mandorlo è più intensa rispetto agli altri versanti — le città di Catania, Siracusa, Caltanissetta, Mineo e Girgenti; e per le Puglie, le città di Bari, Barletta, Locorotondo, Lecce ed Alessano.

Della temperatura riteniamo sia più vantaggioso ai fini della nostra ricerca di considerare il minimo valore che si raggiunge giornalmente, poichè le temperature inferiori ad un certo grado, non solo ritardano lo sviluppo delle cellule superficiali, ma possono anche arrecare danni non lievi, qualora si protraggano per diversi giorni consecutivi. Quindi nell'esaminare le condizioni generali di una regione senza particolare attenzione alle eventuali ed isolate variazioni locali, occorre fondarsi sulla media delle temperature minime osservate giornalmente nei mesi di gennaio, febbraio e marzo. A tal uopo per ciascuna delle dette 10 città abbiamo calcolato la media delle minime temperature in ogni anno del periodo 1909-1924; e dipoi la media corrispondente all'intero periodo che viene assunta come normale. Di ciascuna città si è poscia calcolata la deviazione dalla normale, e la somma algebrica dei valori così ottenuti per ciascuno dei due gruppi di 5 stazioni, indica la deviazione dalla normale da attribuirsi all'intera regione.

Con lo stesso procedimento si è calcolata la deviazione dalla normale quantità di pioggia.

Nella tabella seguente riportiamo i dati così ottenuti; e diamo nel contempo i valori del prodotto del mandorlo espressi in percentuale della media dell'intero periodo (per la Sicilia è di 781,000 quintali e per le Puglie di 338,000 quintali), supponendo che essa sia uguale a 100,000 quintali ⁽¹⁾.

Le cifre scritte in corsivo risultano dalla somma di addendi dello stesso segno; e quindi indicano il medesimo andamento dell'elemento meteorologico considerato su tutta la regione o almeno in quattro delle cinque stazioni della Sicilia o delle Puglie.

Periodo degli anni considerati	SICILIA Catania, Siracusa, Mineo, Caltanissetta, Girgenti						PUGLIE Bari, Barletta, Locorotondo, Lecce, Alessano					
	Quantità percent. della prod. in migliaia di q.	Somma algebrica delle deviazioni dalla me- dia delle minime tem- perature			Somma algebrica delle deviazioni dalla media quantità di pioggia		Quantità percent. della prod. in migliaia di q.	Somma algebrica delle deviazioni dalla me- dia delle minime tem- perature			Somma algebrica delle deviazioni dalla media quantità di pioggia	
		Genn.	Febbr.	Marzo	Febbr.	Marzo		Genn.	Febbr.	Marzo	Febbr.	Marzo
1909	103	- 7.0	-10.4	- 2.2	+ 9	+ 48	82	- 4.1	-11.8	- 2.3	+ 52	+ 67
1910	183	- 1.2	+ 0.7	- 5.3	+ 191	+ 19	117	- 1.6	+ 5.3	- 5.5	+ 323	+ 55
1911	131	- 3.6	- 8.9	- 2.6	- 148	+ 149	61	- 6.6	-15.3	- 5.4	- 148	- 141
1912	135	+ 5.8	+ 8.7	+ 6.3	- 202	- 104	229	- 1.1	+ 9.9	+ 4.6	- 75	- 104
1913	47	+ 4.2	- 2.0	+ 0.9	+ 73	- 115	47	+ 1.2	- 1.6	+ 1.0	+ 102	- 59
1914	128	- 4.1	+ 1.8	+ 0.4	- 59	+ 13	178	- 3.6	+ 6.5	+ 5.1	- 143	- 45
1915	74	- 0.7	- 1.5	- 0.6	- 134	+ 29	28	+ 3.4	+ 3.5	- 5.3	+ 28	+ 57
1916	90	+ 1.8	+ 4.2	+ 5.2	+ 159	+ 58	125	+ 0.4	+ 5.2	+ 8.2	- 136	- 53
1917	46	+ 3.3	+ 0.4	- 2.7	+ 182	+ 55	65	+ 6.1	- 0.6	- 2.3	- 22	- 66
1918	95	- 2.1	- 4.6	- 5.2	- 205	+ 46	56	0.0	- 1.9	- 0.3	- 143	+ 95
1919	46	+ 1.2	+ 1.6	- 1.4	- 27	- 53	42	+ 7.4	+ 2.3	+ 3.8	+ 140	- 18
1920	138	+ 5.6	+ 6.2	+ 5.3	+ 92	+ 37	64	+ 2.2	- 1.9	+ 4.1	- 116	+ 53
1921	89	+ 7.2	+ 1.3	- 0.6	+ 179	+ 254	47	+ 4.2	+ 0.2	- 0.8	- 57	+ 36
1922	142	+ 2.1	+ 5.1	+ 7.9	- 103	- 68	190	- 4.3	- 0.2	+ 2.5	+ 85	- 27
1923	59	- 3.4	+ 1.4	- 3.5	+ 78	- 63	146	- 1.0	+ 1.4	- 4.0	+ 38	+ 24
1924	94	- 3.5	- 0.2	- 3.9	- 88	- 30	122	- 1.5	+ 1.9	- 3.2	+ 8	+ 122

(1) I dati relativi all'entità del raccolto pel 1924 ci furono gentilmente favoriti dall'ing. Zattini, mentre quelli relativi agli anni antecedenti furono desunti dalle notizie periodiche di statistica agraria pubblicate dal Ministero dell'Economia Nazionale.

Dai dati così riuniti risulta pienamente confermata la corrispondenza tra le variazioni termiche e pluviometriche con l'entità del prodotto.

Nelle annate di abbondanza in Sicilia (anni 1912, 1920 e 1922) la temperatura minima dal mese di gennaio al marzo, sull'intera regione, si mantiene superiore alla normale, mentre le precipitazioni sono piuttosto scarse. Per le Puglie (anni 1912, 1914 e 1916) l'abbondanza è assicurata anche quando la superiorità della temperatura si limita ai soli mesi di febbraio e di marzo, purchè contemporaneamente vi sia scarsità di precipitazioni. (La maggiore latitudine della Puglia fa sì che l'inizio della vegetazione del mandorlo avvenga con ritardo rispetto a quanto si verifica in Sicilia).

La superiorità della pioggia rispetto alla normale è dannosa (Sicilia 1916).

Nel 1910 si ebbe abbondanza tanto in Sicilia quanto nelle Puglie, con temperatura minima superiore alla normale e molte piogge; perchè il rapido sviluppo a cui fu sottoposta la vegetazione in tali condizioni, rese quasi innocui gli abbassamenti termici verificatisi nel marzo.

Un altro caso di abbondante prodotto si ebbe nel 1922 nelle Puglie con temperatura minima di poco inferiore alla normale in febbraio e non generalmente estesa a tutta la regione, con piogge abbondanti susseguite da marzo caldo e piuttosto scarso di pioggia.

Un terzo caso di prodotto relativamente abbondante si ebbe nel 1909 e nel 1911 in Sicilia con temperatura inferiore alla normale da gennaio a marzo, ma con piogge generalmente non scarse.

Il prodotto si riduce notevolmente allorchè la temperatura minima del gennaio è superiore alla normale; e i valori più bassi si hanno tutte le volte che al gennaio caldo sussegue febbraio freddo e indi marzo mite (Sicilia, anni 1913, 1923; Puglie, anni 1913, 1919).

Lo stesso avviene se al gennaio caldo subentra febbraio mite e marzo freddo (Sicilia, anni 1917, 1919; Puglie, anni 1917, 1921). E la riduzione del prodotto è più rilevante se marzo freddo succede a gennaio e a febbraio non molto piovosi e con temperatura minima superiore alla normale (Puglie, 1915).

Risulta adunque come non soltanto gli eventuali abbassamenti termici del marzo sono i fatti meteorologici che agiscono decisamente sull'efficienza del mandorlo, ma l'andamento della temperatura minima e delle piogge dell'intero periodo gennaio-marzo che stanno in tal modo a costituire i fattori preponderanti sull'entità del prodotto annuale del mandorlo. Inquantochè le deviazioni dello stesso segno della temperatura minima nei 3 mesi successivi costituenti il detto trimestre unitamente a non eccessive piogge, costituiscono le condizioni ottime, che si mutano in pessime allorchè manca tale uguaglianza e al gennaio caldo subentra febbraio o marzo freddo con piogge non scarse e variamente distribuite nella regione in esame.

Le considerazioni anzidette possono impiegarsi nell'indicare approssi-

mativamente l'entità del prodotto del mandorlo che sarà da attendersi nel corrente anno, basandosi sulle variazioni termiche e pluviometriche dal gennaio al marzo, rispetto alla normale calcolata pel periodo 1909-1924.

L'esame delle relative osservazioni meteorologiche conduce ai seguenti valori:

<i>Somma algebrica delle deviazioni della temperatura minima pel 1925 dalla normale</i>			<i>Somma algebrica delle deviazioni della somma delle precipitazioni pel 1925 dalla normale</i>		
	Gennaio	Febbraio	Marzo	Febbraio	Marzo
Sicilia . . .	0.0	0.0	— 1.5	— 34	+ 166
Puglie . . .	0.0	+ 1.5	— 1.4	— 6	+ 7

Il particolareggiato spoglio delle osservazioni meteorologiche giornaliere ci assicura che, tanto nel gennaio quanto nel febbraio, mancarono gli improvvisi abbassamenti termici. E anzi nelle Puglie dalla prima decade di febbraio a tutta la prima decade di marzo si ebbero per lo più condizioni favorevoli allo sviluppo della vegetazione; cosicchè le gelate avvenute nella seconda decade non riuscirono ovunque dannose e in misura meno rilevante in Sicilia, perchè nel mese di marzo la quantità di pioggia fu molta.

Riferendoci alle considerazioni sopra esposte, appare che nessuno degli anni avanti esaminati mostra l'andamento della temperatura e delle piogge dal gennaio al febbraio perfettamente identico a quello del 1925. Ma poichè in detto anno il gennaio ebbe temperature minime vicine alle normali e poche piogge, possiamo basarci soltanto sull'andamento verificatosi in febbraio e specialmente in marzo ove si constatò maggiore variabilità. Seguendo tale ordine di fatti, il prodotto del mandorlo in Sicilia nel corrente anno, dovrebbe essere molto analogo a quello del 1917; ma poichè le piogge del febbraio furono scarse (e quindi la vegetazione non subì un rapido incremento) e abbondarono in marzo (il che rese meno dannosi gli effetti dei repentini abbassamenti termici) dobbiamo attenderci un prodotto non affatto identico a quello del 1917, ma invece probabilmente vicino alla normale. Nelle Puglie l'andamento della temperatura del febbraio e del marzo del corrente anno è pressochè identico a quello del 1913 con la differenza che le piogge furono scarse in febbraio e di poco superiori alla normale in marzo. Quindi anche nelle Puglie gli abbassamenti termici del marzo non riuscirono ovunque molto dannosi per l'avanzato sviluppo della vegetazione. Il prodotto può prevedersi pressochè vicino alla normale, ma come percentuale alquanto inferiore a quello che si avrà in Sicilia, perchè alcune forme di mandorlo furono colte nella piena fioritura.

Biologia. — *Le funzioni del peduncolo, del diverticolo e della vescicola di Swammerdam nel « Gen. Helix. ».* Nota del dottor PRIMO DORELLO presentata dal Socio Corrisp. S. BAGLIONI.

In un precedente lavoro ho avuto occasione di descrivere la complicata struttura dello spermatoforo di parecchie specie appartenenti al gen. *Helix* ed ho dimostrato che la coda è formata da una lamina avvolta su sè stessa a spirale per più di due giri nell'*H. vermiculata*: nel momento della formazione dello spermatoforo le spire sono separate da un largo intervallo, anzi in corrispondenza dello sbocco del deferente la prima spira è mantenuta ben distanziata dalla seconda per mezzo di due pieghe della mucosa, in mezzo alle quali si apre il deferente, in modo che lo sperma viene proiettato entro la cavità della coda in corrispondenza della sua estremità anteriore e giunge facilmente entro il nodo.

Quando lo spermatoforo in seguito alle contrazioni della parete perianiana comincia a muoversi per passare da un coniuge all'altro la sua ermetica chiusura è assicurata per l'attività di uno speciale organo glandolare, il quale segrega una sostanza cementante; questa è spinta entro la fessura e ne mantiene aderenti le pareti. In tal modo ogni animale riceve dal compagno un astuccio spermatico completamente chiuso.

Riguardo al modo col quale lo sperma è liberato dal suo astuccio e circa l'organo nel quale esso si ferma fino al momento della fecondazione, la quale può avvenire qualche mese dopo l'accoppiamento ed in certi speciali casi anche negli anni successivi, si avevano fino ad ora idee molto vaghe.

Infatti per quanto riguarda il destino dello spermatoforo Keferstein ed Ehlers sostennero che nell'*H. pomatia* lo spermatoforo durante il primo giorno rimane immutato nel peduncolo, ma successivamente si altera e passa in gran parte nella vescicola di Swammerdam insieme coi nemaspermii, i quali anche dopo quattro settimane si trovano in questo organo ben conservati. Questi autori non accennarono affatto alla funzione del diverticolo, perchè nella *pomatia* questo organo manca od è affatto rudimentale.

Meisenheimer nella stessa specie affermò che il segmento anteriore dello spermatoforo dopo 3 a 6 ore arriva nella vescicola, ove ben presto si scioglie.

Hofmann nell'*H. arbustorum* trovò che 24 ore dopo la copula il nodo dello spermatoforo si trova nel mezzo del diverticolo, mentre la coda giunge

ancora nella vagina, e rimane in questa posizione per cinque giorni, finchè va incontro alla dissoluzione: lo spermatoforo non si trova mai nel peduncolo proprio, anzi l'autore crede che ciò sia impossibile per la ristrettezza di questo condotto. Secondo Hofmann la dissoluzione dello spermatoforo avviene per l'azione del secreto del diverticolo e si inizia nel nodo, in modo che gli spermatozoidi divenuti liberi emigrano nella vescicola di Swammerdam, ove rimangono fino al momento della fecondazione.

Secondo il parere di tutti questi osservatori e di molti altri la vescicola di Swammerdam è l'organo, nel quale dimorano i nemaspermi ricevuti dal coniuge, finchè non vengono utilizzati per la fecondazione. Ma di questo parere non è il Perez, il quale nell'*H. aspersa* vide che al settimo giorno la vescicola copulatrice non conteneva più sperma, mentre che già al secondo giorno si trovavano nemaspermi nell'ovidotto.

Per portare il mio contributo alla risoluzione delle questioni sopra esposte ho esaminato un grande numero di elici, che si erano accoppiate, dopo aver determinato colla maggiore precisione il tempo trascorso dal coito e vi sono riuscito senza togliere gli animali dall'ambiente in cui vivono abitualmente, servendomi per riconoscerli di segni fatti sulla loro conchiglia. Ho potuto così seguire passo passo tutti i fenomeni consecutivi all'accoppiamento.

La distruzione dello spermatoforo è un fatto relativamente tardivo, poichè avviene quando ne sono usciti la maggior parte dei nemaspermi. Tuttavia lo spermatoforo, dopo un breve soggiorno nelle vie genitali, diviene estremamente fragile e certamente le fratture in esso prodotte da manipolazioni poco delicate sono state ritenute come naturali.

Le osservazioni furono fatte in parte a fresco in parte su preparati fissati e tagliati in serie. La specie studiata fu l'*H. vermiculata*.

Nel momento in cui i due coniugi si sciolgono dall'amplesso, lo spermatoforo è di regola completamente penetrato nell'apparecchio genitale femminile, e, mentre il segmento anteriore, il nodo e qualche millimetro della coda si trovano nel diverticolo, il resto della coda occupa il peduncolo comune e la vagina. Eccezionalmente qualche millimetro della estremità della coda può sporgere ancora dall'apertura genitale, ma di regola in pochi minuti per le contrazioni muscolari viene anche essa tirata entro. Nella maggior parte dei casi l'apice della coda si trova nell'istmo ed assai frequentemente si insinua nel solco della papilla ogivale.

Lo spermatoforo appena passato da un animale all'altro si presenta perfettamente chiuso, perchè un sufficiente strato di sostanza cementante unisce la spira esterna della coda colla spira sottostante.

Il primo fenomeno che si manifesta è la dissoluzione di questo cemento e la conseguente apertura della coda che suole essere completa entro le prime 3 ore. Siccome i fenomeni secretori più attivi si manifestano in questo momento nel peduncolo comune, la cui mucosa sta in stretto contatto colla

coda, io ritengo che sia appunto il secreto di questo condotto quello che determina lo sciogliersi del cemento. Questo diviene granuloso, poi spongioso per numerose bollicine gassose, che appaiono nella sua compagine, perde gradualmente l'affinità per i colori ed il potere adesivo in modo che, staccatasi la spira esterna dalla sottostante, la fessura della coda si apre e la sua spirale si allarga. L'allargamento è dovuto anche al fatto che la lamina, la quale forma la coda dello spermatoforo, si rigonfia. Questo rigonfiamento, che si può considerare come il primo fenomeno della dissoluzione, consiste in una specie di imbibizione, alla quale va maggiormente soggetta la spira esterna, che sta maggiormente a diretto contatto coi liquidi attivi. Oltre al rigonfiamento si osserva la messa in evidenza delle numerose e sottili lamine, che, aderendo una all'altra, formano lo spermatoforo, come se fosse disciolta la sostanza che le mantiene unite. Ritengo che questo fenomeno sia dovuto al secreto del diverticolo, anche per il fatto che è massimamente pronunciato quando tutto lo spermatoforo è penetrato nel diverticolo.

Entro la fessura aperta della coda dello spermatoforo penetra una robusta piega della mucosa: questa piega si trova nell'istmo, nel peduncolo comune ed anche nel primo tratto del diverticolo corrispondentemente a quella parte, nella quale si trova la coda dello spermatoforo; manca invece nel bulbo. Questa piega evidentemente contribuisce ad allontanare la prima spira della coda dalla sottostante e facilita la penetrazione del solvente del cemento: infatti quanto più essa è penetrata nella coda tanto più scarsi sono i residui del cemento. Ma la piega presiede anche ad un'altra funzione, cioè ostacola la fuoriuscita dei nemaspermi da una buona parte della fessura della coda, permettendola solo in corrispondenza del bulbo. Infatti dove la piega è penetrata nello spermatoforo i nemaspermi sono abbondantissimi nel lume di questo, mentre sono molto scarsi nel lume del tubo che lo contiene. Invece nel bulbo vaginale, ove la piega manca, si accumulano numerosi nemaspermi, i quali usciti in gran numero dalla fessura della coda vengono a trovarsi proprio di fronte allo sbocco dell'ovidutto, che è pervio e li lascia entrare liberamente. Ma la sola apertura della coda dello spermatoforo non sarebbe sufficiente a determinare l'uscita dei nemaspermi, i quali si trovano nel nodo riuniti in grossi tasci e come agglutinati, in modo che, se anche si pongono in un liquido favorevole alla loro vita, non si sciolgono uno dall'altro. Perchè cessi questo stato di agglutinamento occorre, come ho verificato anche in vitro, l'intervento di un nuovo secreto, il quale si era già formato in grande quantità durante il coito nella vescicola di Swammerdam. Perchè questo secreto possa giungere a contatto con tutta la coda dello spermatoforo e quindi più facilmente penetri nella sua fessura, fin dalle prime ore dopo il coito compaiono formazioni transitorie, ma caratteristiche, nel bulbo vaginale, ma soprattutto nel peduncolo comune: cioè compaiono nella mucosa di questi organi due pieghe longitudinali, che si

vengono incontro e dividono incompletamente il peduncolo comune ed il bulbo in due parti, una più grande, che contiene lo spermatoforo e si continua col diverticolo, l'altra più piccola, che si continua col peduncolo proprio. Così il secreto accumulato nella vescicola di Swammerdam per le contrazioni della parete di questa e per il rilasciamento del suo sfinterè fluisce lentamente nel peduncolo proprio, passa nella cavità più piccola del peduncolo comune e da questa, favorito da una speciale obliquità delle pieghe, raggiunge la cavità più grande: venuto a contatto collo spermatoforo, ne attraversa la fessura, penetra nella sua cavità assiale e quindi raggiunge la cavità del nodo. Appena viene a contatto colla massa dei nemaspermi scioglie la sostanza che li unisce ed esercita sopra di essi una forte azione eccitante. Allora i nemaspermi, divenuti liberi e dotati di energici movimenti, scendono lungo la cavità della coda e si avviano verso la fessura per uscirne. Ma siccome questa è ostruita dalla piega, salvo in corrispondenza del bulbo vaginale, è precisamente in corrispondenza di questo punto che avviene la loro uscita.

I nemaspermi che escono prima sono quelli che occupano la parte caudale del nodo, cioè quelli che durante il coito sono penetrati per ultimi nello spermatoforo e sono appunto questi, che penetrano subito nell'ovidutto. Invece i nemaspermi, che sono penetrati per primi nel nodo e che ne occupano la parte anteriore, rimangono ancora per qualche tempo in posto ed hanno un altro destino.

Durante il coito si nota una forte produzione di cuticola per tutta l'estensione della vagina: questa produzione continua nelle prime 12 ore dall'accoppiamento, per modo che questa formazione raggiunge uno spessore enorme, il quale può uguagliare la metà dell'altezza delle cellule che l'hanno prodotta; questa cuticola si presenta spesso stratificata ed i vari strati possono anche separarsi spontaneamente uno dall'altro.

Nella seconda metà della giornata susseguente al coito e quando un buon numero di nemaspermi è penetrato nell'ovidutto la cuticola comincia a distaccarsi dalla mucosa vaginale a larghi tratti, che conservano la loro continuità. Il distacco si inizia nella estremità anteriore dell'istmo e di lì progredisce verso l'indietro in modo che alla fine del primo giorno tutta la mucosa dell'istmo si è spogliata della cuticola, che è stata trasportata in parte nel bulbo, in parte nel peduncolo comune, nel proprio e nella vescicola di Swammerdam. Il bulbo perciò presenta ora la cuticola propria, che ancora riveste in gran parte la sua mucosa e nella sua cavità mostra un groviglio complicatissimo risultante dalle numerose ripiegature della cuticola dell'istmo: questo groviglio si accumula di preferenza innanzi alla fessura dello spermatoforo. Lo stesso fenomeno si verifica anche nel peduncolo comune, ove una parte della cuticola può essere spinta entro la fessura della coda per opera della piega della mucosa. Avviene così che una buona parte della coda dello spermatoforo è avvolta da una specie di velo for-

mato dalla cuticola ed accumulato specialmente di fronte alla fessura: contro questo velo vengono ad arrestarsi e si appoggiano con un lato della loro testa i nemaspermi che escono dalla fessura; essi vi rimangono impigliati e sono così costretti a seguire la cuticola nei suoi spostamenti.

Il meccanismo, col quale avviene il distacco della cuticola dalla mucosa, è abbastanza complesso. Una certa quantità di plasma sanguigno, filtrando attraverso gli spazi intercellulari, si viene ad accumulare tra l'epitelio e la cuticola, determinando un allontanamento delle due formazioni; dove la filtrazione è più abbondante si vedono nettamente gli spazi intercellulari: ma oltre al plasma passano anche amebociti, i quali si possono seguire facilmente durante la loro marcia, malgrado che la loro forma si modifichi notevolmente per adattarsi alla ristrettezza dello spazio che attraversano. Nei punti, nei quali il distacco della cuticola è più esteso, si osservano parecchi di questi amebociti raggruppati, i quali finiscono per rimanere aderenti alla cuticola. Così anche nei grovigli più complicati si può riconoscere quale è la faccia assiale della cuticola, perchè su questa faccia si trovano applicati i nemaspermi, mentre che sulla faccia primitivamente esterna si trovano gli amebociti.

In tal modo prima che avvenga il distacco della cuticola gli spermatozoi escono in massima parte da quella porzione di fessura che si trova innanzi allo sbocco dell'ovidutto e penetrano in questo organo, mentre quei pochi, i quali in altri punti riescono a superare la barriera offerta dalla piega del peduncolo comune, per mezzo dei loro movimenti passano nella parte più ristretta di questo peduncolo, risalgono lungo il peduncolo proprio e penetrano nella vescicola di Swammerdam.

Invece dopo che è avvenuto il distacco della cuticola dalla parete vaginale tutti i nemaspermi, che escono dalla fessura dello spermatoforo, si adagiano sulla cuticola, aderendole ed insieme con essa, per opera delle contrazioni muscolari della parete del peduncolo comune e proprio sono trasportati nella vescicola di Swammerdam. Perciò alla fine del primo giorno il contenuto di questa vescicola si trova profondamente modificato: il vecchio nucleo, residuo dei coiti precedenti, è stato respinto verso il fondo, mentre che la metà cervicale della vescicola, oltre che dal secreto della sua mucosa, è occupato da numerosi nemaspermi liberi e da un groviglio di cuticola, in gran parte ben conservata, nel quale si trovano impigliati numerosi nemaspermi ed amebociti; questi ultimi sono in degenerazione più o meno avanzata: vi si può trovare inoltre la corona del dardo emesso nell'ultimo coito.

Durante il secondo giorno lo spermatoforo ancora integro continua ad avanzarsi nelle vie genitali femminili e verso la 48^a ora l'estremità della coda si trova nel terzo anteriore del peduncolo comune: la mucosa di questo ha ripreso l'aspetto, che presenta allo stato di riposo, e nella vagina si è riformata una cuticola di discreto spessore, la quale alla sua volta si distac-

cherà nuovamente. Il peduncolo comune, oltre alla coda dello spermatoforo, contiene un notevole groviglio di cuticola, che non solo avvolge tutta la coda, ma si insinua profondamente entro la sua fessura e ne riempie quasi completamente la cavità, che ora è poverissima di nemaspermi. All'estremità posteriore del peduncolo comune la cuticola si continua in minima parte nel diverticolo, limitandosi ad occuparne la porzione iniziale, mentre che la massima parte della cuticola si continua nel peduncolo proprio, dilatandolo e formando un vero tappo, che meccanicamente spinge avanti a sé tutti i nemaspermi liberi: infatti in mezzo al groviglio gli spermatozoi sono scarsi, mentre formano una massa imponente verso la parte posteriore del peduncolo proprio subito dietro l'estremità del tappo di cuticola.

Durante il terzo e quarto giorno lo spermatoforo viene tratto interamente nel diverticolo; il peduncolo comune rimane vuoto, mentre le pieghe della sua mucosa, turgide per un abbondante afflusso sanguigno, si avvicinano strettamente una all'altra in modo da ostruire completamente il lume.

Sotto l'azione del secreto del diverticolo in molti punti dello spermatoforo compaiono profonde alterazioni chimiche e le zone che ne sono colpite presentano una minore colorabilità ed una grande fragilità, in modo che bastano le contrazioni della parete del diverticolo per produrre numerose fratture, che dividono lo spermatoforo in molti pezzi. Le contrazioni delle pareti debbono essere molto vivaci, perchè i frammenti perdono i loro reciproci rapporti e spesso si mettono uno di fianco all'altro.

Successivamente questi frammenti vengono spinti nel peduncolo comune, donde risalgono subito nel peduncolo proprio e nella vescicola di Swammerdamm, trascinando seco gli spermatozoidi rimasti eventualmente nella loro cavità. Generalmente questi frammenti sono piccoli, ma alcune volte possono essere tanto voluminosi da produrre una enorme dilatazione del peduncolo proprio. Anche la muscolatura di questo peduncolo e lo sfintere della vescicola di Swammerdamm contribuiscono a frantumare i pezzi dello spermatoforo, per modo che questi, quando raggiungono la cavità della vescicola, sono assai piccoli.

Nella mucosa del peduncolo proprio e della vescicola di Swammerdamm si osservano fenomeni, i quali dimostrano che a questi organi è devoluta la funzione di riassorbire la sostanza, che forma lo spermatoforo.

Mentre avvengono questi fenomeni, il contenuto della vescicola di Swammerdamm si modifica notevolmente. Le lamine di cuticola, le quali come abbiamo visto formavano un complicato groviglio, che teneva imprigionati numerosi nemaspermi, sotto l'azione del liquido contenuto nella vescicola si rigonfiano, diminuiscono la loro colorabilità e finiscono per fondersi in una massa, nella quale con difficoltà si riesce a scorgere ancora in qualche punto i limiti dei foglietti, che l'hanno formata. La cuticola, mentre incomincia ad alterarsi, perde la proprietà di trattenere i nemaspermi, per cui questi si liberano in gran parte, riunendosi in voluminosi gruppi:

quelli, che rimangono impigliati in mezzo alla cuticola rigonfia, vanno incontro ad una rapida degenerazione.

Tra il sesto ed il dodicesimo giorno si osserva in tutto il contenuto della vescicola una profonda spermatolisi, per cui diviene sempre più difficile osservare nemaspermii, i quali per i loro caratteri morfologici possano considerarsi normali.

Dal complesso dei fenomeni osservati risulta quindi poco probabile che la vescicola di Swammerdam abbia l'ufficio di conservare i nemaspermii vitali fino a quando essi non vengano utilizzati per la fecondazione.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio CASTELNUOVO, a nome anche del Corrisp. ENRIQUES, relatore, legge una relazione con la quale si propone di inserire nei volumi degli Atti accademici, la Memoria del dott. OSCAR ZARISKI, intitolata: « Sugli sviluppi in serie delle funzioni algebroidi in campi contenenti più punti critici ».

La proposta della Commissione predetta è approvata dalla Classe, salve le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente PIROTTA dà il triste annuncio della morte del Socio prof. ARISTIDE STEFANI, del quale, a nome dell'Accademia, rimpiange la perdita.

Il Socio FANO ricorda i meriti dell'amato Collega, che fu uomo modesto e laborioso, scienziato valoroso e onesto nelle sue ricerche, e che forse non venne apprezzato come meritava. Il Socio FANO dice di rendere un sincero omaggio alla Sua memoria, accompagnandolo col cordoglio di una perdita il cui vuoto non è facile a colmare.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, facendo particolare menzione dell'opera del Socio straniero A. VON BRILL: « Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen ». Egli osserva che quest'opera si stacca dalle altre pubblicate sullo stesso argomento negli ultimi decenni, per ciò che l'autore, riaccostandosi ai primi cultori della geometria analitica, studia specialmente le curve nel campo

reale (rami reali, forma della curva nell'intorno di un punto singolare,...). Alla geometria algebrica nel campo della variabile complessa, dove l'autore ha pur portato tanti notevoli contributi, è dedicata solo una piccola parte del presente volume.

Lo stesso Segretario aggiunge che è pervenuto alla Segreteria un volume dattilografato dell'astronomo T. J. J. SEE avente per titolo: « Researches in non-Euclidian Geometry and the Theory of Relativity » sul quale l'autore richiama l'attenzione dell'Accademia.

Il Corrisp. PARRAVANO presenta, discorrendone, una pubblicazione fatta per cura della Società Breda e illustrante l'Istituto scientifico-tecnico che la detta Società ha creato a Milano, e chè porta il nome del suo fondatore, l'ing. ERNESTO BREDA.